Problem optymalizacyjny

- maksymalizacji / minimalizacji - funkcji celu
  - Set Cover
  - Maximum Flow

- NP-trudny → np. $\Theta(2^n)$
- wielomianowy → wolny (np. $\Theta(n^{20})$) → szybki $O(n \log n)$, $O(n^2)$

ALGORYTMY PRZYBLIŻONE

- wyniki być może nieoptymalne
- wielomianowe szybkie

Π – problem optymalizacyjny

A – algorytm aproksymacyjny dla problemu Π

I – instancja problemu Π

$A(I)$ – koszt rozwiązania zwracanego przez algorytm A dla I

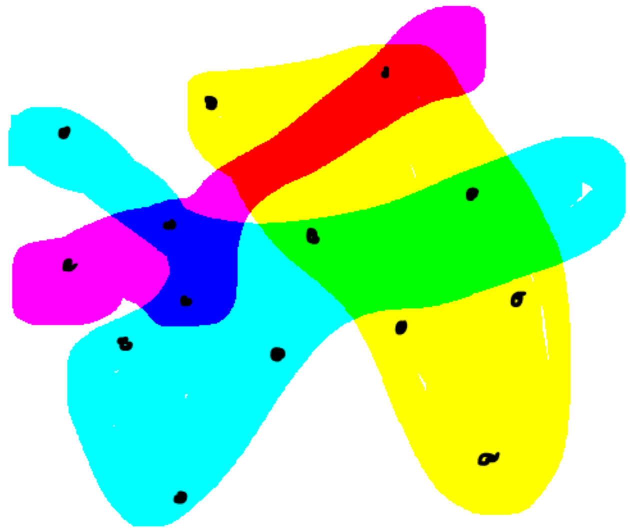
$OPT(I)$ – koszt optymalnego rozwiązania dla I

WSPÓŁCZYNNIK APROKSYMACJI

$$\max_{I}\left(\frac{A(I)}{OPT(I)},\ \frac{OPT(I)}{A(I)}\right)$$

minimalizacja – maksymalizacja –

Set Cover (pokrycie zbiorów)



$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - elementy

$S_1, S_2, \ldots, S_m$ - podzbiory

w_j - koszt zbioru S_j

Problem. Wybrać najtańszą podrodzinę zbiorów, która pokrywa wszystkie x_i.

$$\min \sum_{j \in J} w_j \qquad \forall_{x_i} \exists_{j \in J} \text{ t.ż. } x_i \in S_j$$

zbiór indeksów wybranych podzbiorów do pokrycia

PL całkowitoliczbowe (0/1)

wybieramy

$$\begin{cases} 1 & j \in \mathcal{J} \\ 0 & j \notin \mathcal{J} \end{cases}$$

nie wybieramy

z_j - zmienna 0/1 dla każdego zbioru S_j

funkcja celu: $\min \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot z_j$

ograniczenie: dla każdego elementu x_i: $\sum_{j : x_i \in S_j} z_j \geq 1$

przynajmniej jeden zbiór, do którego należy x_i, musi być wybrany (1)

$$z_i \in \{0,1\}$$

TRUDNE

...... a gdyby opuścić założenie $z_i \in \{0,1\}$

$\longrightarrow$ RELAKSACJA

(PROSTY WARIANT)

PL całkowitoliczbowe

zmienne $z_1, z_2, \dots, z_m$

Z

dopuszczalne

RELAKSACJA

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

?

jak przedstawić wnętrze Z^* w wnętrze Z

ma wpływ na kształt wnętrza całkowitoliczbowego

PL (ciągłe)

zmienne $z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*$

Z^*

dopuszczalne

PL (po relaksacji)

z_j^* - zmienna dla każdego zbioru S_j

funkcja celu: $\min \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot z_j^*$

ograniczenia: dla każdego elementu x_i: $\sum_{j : x_i \in S_j} z_j^* \geq 1$

suma zmiennych zbiorów, do których należy x_i musi być ≥ 1

$\forall_j \; 0 \leq z_j^* \leq 1$

Niech f_i oznacza częstość elementu x_i:

tzn. $f_i = \left| \{ j : x_i \in S_j \} \right|$

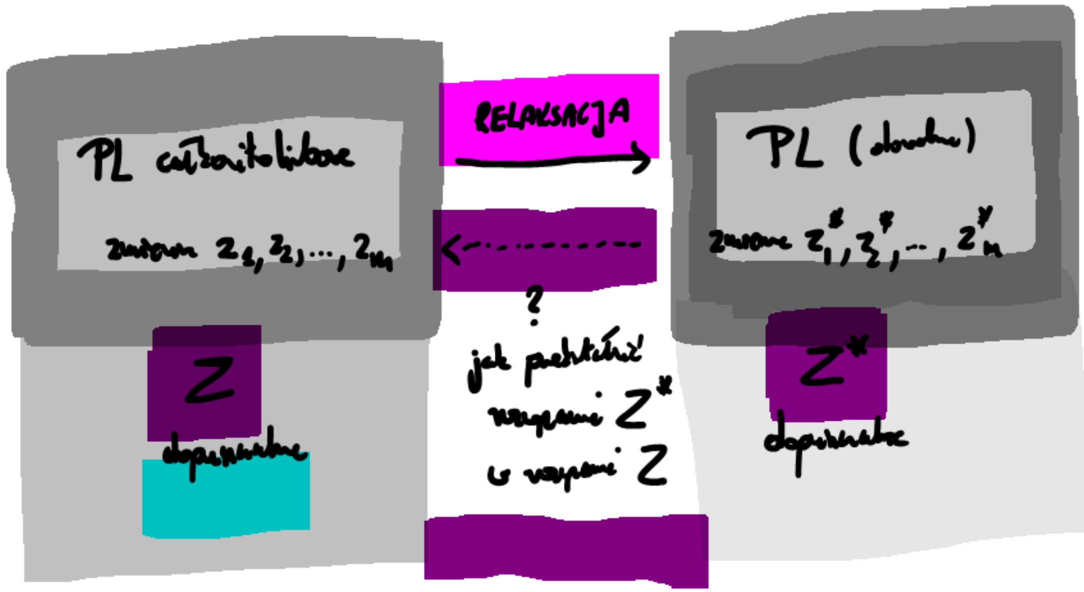
(do ilu zbiorów należy x_i)

Niech $f = \max_i f_i$.

$[z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*]$ ... wynik (PL)

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } z_j^* \geq \frac{1}{f} \\ 0 & \text{jeśli } z_j^* < \frac{1}{f} \end{cases}$$

$$Z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$$



$z_j \in \{0, 1\}$? $0 \leq z_j^* \leq 1$

① Czy Z jest dopuszczalne?

? — $z_j \in \{0,1\}$ TAK

? — $\sum_{j: x_i \in S_j} z_j \geq 1$ przynajmniej jeden zbiór, do którego należy x_i musi być wybrany (1) TAK

MAMY

- dla każdego elementu x_i: $\sum_{j: x_i \in S_j} z_j^* \geq 1$

$J_i := \{j : x_i \in S_j\}$

$|J_i| \leq f$

co najwyżej f zmiennych

- każdy element występuje w co najwyżej f zbiorach, (z def. f)

zatem $\exists_j$ t.ż. $z_j^* \geq \frac{1}{f}$ .... zachodzi $z_j = 1$, a stąd $\sum_{j: x_i \in S_j} z_j \geq 1$

oraz $x_i \in S_j$

② współczynnik aproksymacji (min).

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot z_j}{OPT(I)} \le \dots f$$

algorytm f-przybliżony

funkcja celu: $\min \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot z_j$

$$J = \{ j : z_j = 1 \} = \{ j : z_j^* \ge \tfrac{1}{f} \}$$

$z_j^* \ge \frac{1}{f}$, zatem $f \cdot z_j^* \ge 1$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot z_j = \sum_{j \in J} w_j \cdot 1 \le \sum_{j \in J} w_j \cdot f \cdot z_j^* \le f \cdot \sum_{j \in J} w_j \cdot z_j^* =$$

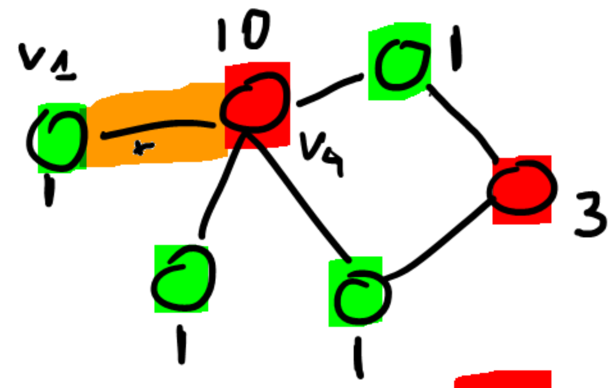
$j \notin J$

$z_j = 0$

$$= f \cdot \underbrace{OPT^*(I)}_{\text{opt. f. celu dowolne } \in [0,1] \text{ zmienne}} \le f \cdot \underbrace{OPT(I)}_{\text{opt. f. celu. ta sama zmienne } \in \{0,1\}}$$

Pokrycie wierzchołkowe

$$G=(V,E,c)$$
$$c: V \to R$$



$\{v_1, v_4\} \in E$

$x_1 + x_4 \geq 1$

Problem. Wyznaczyć najtańsze pokrycie wierzchołkowe

4 X   13 X

$$\left(X \subseteq V,\ \text{każda krawędź ma przynajmniej jeden koniec w } X,\ \min \sum_{x \in X} c(x)\right)$$

PL

x_i - zmienna $\begin{cases} 1 & v_i \in X \\ 0 & v_i \notin X \end{cases}$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

f. celu: $\min \sum_{i=1}^{n} c(v_i) \cdot x_i$

ograniczenia: dla każdej krawędzi $e = \{v_i, v_j\}$ zachodzi $x_i + x_j \geq 1$

$x_i \in \{0,1\}$

WARIANT SET COVER z $f=2$ (elementy = krawędzie; zbiory = wierzchołki)

→ RELAKSACJA → $f=2$ → algorytm 2-przybliżony

→ RELAKSACJA → PÓŁCAŁKOWITOLICZBOWOŚĆ → algorytm 2-przybliżony

wierzchołki obszaru dopuszczalnego mają współrzędne $\in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

PL całkowitoliczbowe   PL relaksacji

$x_j \longleftarrow x_j^* \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$x_j = \begin{cases} 0 & x_j^* = 0 \\ 1 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$x_i^* + x_j^* \geq 1 \Big\}$ albo $x_i^* \neq 0$ lub $x_j^* \neq 0$ $\longrightarrow x_i = 1$ albo $x_j = 1$

dopuszczalność: $x_j \in \{0,1\}$ TAK

dla każdej krawędzi $e = \{v_i, v_j\}$: $x_i + x_j \geq 1$ TAK

koszt:

$$J = \{j : x_j^* \in \{\tfrac{1}{2}, 1\}\}$$

$$\sum_j c(v_j) \cdot x_j = \sum_{j \in J} c(v_j) \leq 2 \sum_{j \in J} c(v_j) \cdot x_j^* \leq 2 \cdot OPT^*(I) \leq 2 \cdot OPT(I)$$