DUALIZM W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

Niech dane będą macierz $A_{m\times n}$ oraz wektory $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Zadanie pierwotne (ZP):

$$\begin{array}{c} c^T x \longrightarrow \text{max}, \\ Ax \le b, \quad x \ge 0, \end{array} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Zadanie dualne (ZD):

$$\begin{array}{c} b^T y \longrightarrow \text{min}, \\ A^T y \ge c, \quad y \ge 0, \end{array} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

DUALIZM W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

Niech dane będą macierz $A_{m\times n}$ oraz wektory $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Zadanie pierwotne (ZP):

$$\begin{aligned} c^T x &\longrightarrow \max, \\ Ax \le b, &\quad x \ge 0, \end{aligned} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Zadanie dualne (ZD):

$$\begin{aligned} b^T y &\longrightarrow \min, \\ A^T y \ge c, &\quad y \ge 0, \end{aligned} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Przykład.

(ZP) $2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(ZD) $14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

KOMPLEMENTARNOŚĆ (ZP) I (ZD)

Twierdzenie.

(a) Jeśli wektory x, y są dopuszczalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$\text{max} \longrightarrow c^T x \leq y^T b. \longleftarrow \text{min}$$

(b) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$y^T(b - Ax) = 0, \quad (y^T A - c^T)x = 0.$$

(c) Jeśli wektory x, y są optymalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x = y^T b.$$

(a) Jeśli wektory x, y są dopuszczalne dla zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD) odpowiednio, to

$$c^T x \leq y^T b.$$

ZD: $A^T \cdot y \geq c$

$c \leq A^T \cdot y \quad / \, ^T$

$c^T \leq (A^T \cdot y)^T$

$c^T \leq y^T \cdot (A^T)^T = y^T \cdot A \quad / \cdot x \ (\geq 0)$

$c^T \cdot x \leq y^T \cdot A \cdot x \underbrace{\leq y^T \cdot b}_{\text{bo } x \text{ dopuszczalny}}$

A: $(M^T)^T = M$

B: $(M \cdot N)^T = N^T \cdot M^T$

Uwaga. Implikacje w (b) i (c) można odwrócić przy dodatkowym założeniu, że x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio:

(1) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio, $y^T(b - Ax) = 0$ oraz $(y^T A - c^T)x = 0$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

(2) Jeśli x, y są dopuszczalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio oraz $c^T x = y^T b$, to x, y są optymalne dla zadania (ZP) i (ZD) odpowiednio.

Przykład.

(ZP) $2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 2x_2 \leq \ \ 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq \ \ 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(ZD) $14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \quad \to \quad \min$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

warunek 1: $0 = y^T(b - Ax) = [y_1,\ y_2,\ y_3] \begin{bmatrix} 14 - 2x_1 - 2x_2 \\ 8 - x_1 - 2x_2 \\ 16 - 4x_1 \end{bmatrix}$

warunek 2: $0 = (y^T A - c^T)x = [2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2,\ 2y_1 + 2y_2 - 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Przykład cd.

warunek 1:

$$\overset{\geq 0}{y_1}\overbrace{(14-2x_1-2x_2)}^{\geq 0}+\overset{\geq 0}{y_2}\overbrace{(8-x_1-2x_2)}^{\geq 0}+\overset{\geq 0}{y_3}\overbrace{(16-4x_1)}^{\geq 0}=0$$

$$\begin{cases} y_1(14-2x_1-2x_2)=0 \\ y_2(8-x_1-2x_2)=0 \\ y_3(16-4x_1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=0 \ \vee \ 14-2x_1-2x_2=0 \\ y_2=0 \ \vee \ 8-x_1-2x_2=0 \\ y_3=0 \ \vee \ 16-4x_1=0 \end{cases}$$

warunek 2:

$$\overbrace{(2y_1+y_2+4y_3-2)}^{\geq 0}\overset{\geq 0}{x_1}+\overbrace{(2y_1+2y_2-3)}^{\geq 0}\overset{\geq 0}{x_2}=0$$

$$\begin{cases} (2y_1+y_2+4y_3-2)x_1=0 \\ (2y_1+2y_2-3)x_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1+y_2+4y_3-2=0 \ \vee \ x_1=0 \\ 2y_1+2y_2-3=0 \ \vee \ x_2=0 \end{cases}$$

np. • $\begin{cases} 14-2x_1-2x_2=0 \\ 8-x_1-2x_2=0 \\ y_3=0 \end{cases}$ ... $x_1=6$, $x_2=1$, $y_3=0$

dopuszczalne?

$16-4x_1 = 16-4\cdot 6 = 16-24 = -8 < 0$!

nie jest dopuszczalne!

• warunek 1:

$$\underset{\geq 0}{y_1}(\underset{\geq 0}{14-2x_1-2x_2}) + \underset{\geq 0}{y_2}(\underset{\geq 0}{8-x_1-2x_2}) + \underset{\geq 0}{y_3}(\underset{\geq 0}{16-4x_1}) = 0 \quad \geq 0$$

$$\begin{cases} y_1(14-2x_1-2x_2)=0 \\ y_2(8-x_1-2x_2)=0 \\ y_3(16-4x_1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=0 \ \lor \ 14-2x_1-2x_2=0 \\ y_2=0 \ \lor \ 8-x_1-2x_2=0 \\ y_3=0 \ \lor \ 16-4x_1=0 \end{cases}$$

•• warunek 2:

$$(\underset{\geq 0}{2y_1+y_2+4y_3-2})\underset{\geq 0}{x_1} + (\underset{\geq 0}{2y_1+2y_2-3})\underset{\geq 0}{x_2} = 0 \quad \geq 0$$

$$\begin{cases} (2y_1+y_2+4y_3-2)x_1=0 \\ (2y_1+2y_2-3)x_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1+y_2+4y_3-2=0 \ \lor \ x_1=0 \\ 2y_1+2y_2-3=0 \ \lor \ x_2=0 \end{cases}$$

np. • $\begin{cases} 14-2x_1-2x_2=0 \\ y_2=0 \\ y_3=0 \end{cases}$ $x_1=?$ $x_2=?$

$x_2=0$ $\quad 14-2x_1-0=0$ $\quad x_1=7$

$16-4x_1 = 16-4\cdot 7 < 0$

nie jest dopuszczalne!

•• $\begin{cases} (2y_1+y_2+4y_3-2)\cdot x_1=0 \\ (2y_1+2y_2-3)\,x_2=0 \end{cases}$ $\quad y_2=0$, $y_3=0$

$\begin{cases} (2y_1-2)\cdot x_1=0 \\ (2y_1-3)\cdot x_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y_1-2=0 \ \text{lub} \ x_1=0 \\ 2y_1-3=0 \ \text{lub} \ x_2=0 \end{cases}$

np. $x_1=0$

$x_1=0$

np. $2y_1-2=0$

$y_1=1$

$2\cdot y_1-3\neq 0$

$\Rightarrow x_2=0$

z punktu 1° (•)

$x_1=0$

$14-0-2x_2=0 \quad x_2=7$

$8-x_1-2x_2\geq 0$?

$8-0-2\cdot 7=-6<0$ niedopuszczalne!

(...)

np. $\begin{cases} y_1 = 0 \\ 8 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ 16 - 4x_1 = 0 \end{cases}$

$x_2 = 2 \geqslant 0$

$x_1 = 4 \geqslant 0$

warunek 1:

$$y_1(14 - 2x_1 - 2x_2) + y_2(8 - x_1 - 2x_2) + y_3(16 - 4x_1) = 0$$

$$\begin{cases} y_1(14 - 2x_1 - 2x_2) = 0 \\ y_2(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ y_3(16 - 4x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \ \vee \ 14 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \ \vee \ 8 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ y_3 = 0 \ \vee \ 16 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

warunek 2:

$$(2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 + (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0$$

$$\begin{cases} (2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2 = 0 \ \vee \ x_1 = 0 \\ 2y_1 + 2y_2 - 3 = 0 \ \vee \ x_2 = 0 \end{cases}$$

$14 - 2x_1 - 2x_2 = 14 - 8 - 4 = 12 \geqslant 0$

dopuszczalne dla 2P.

$x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2 = 0 \\ 2y_1 + 2y_2 - 3 = 0 \end{cases}$ $y_1 = 0 \geqslant 0$

$\begin{cases} y_2 + 4y_3 - 2 = 0 \\ 2y_2 - 3 = 0 \end{cases}$ $y_3 = \frac{1}{8} \geqslant 0$, $y_2 = \frac{3}{2} \geqslant 0$

dopuszczalne dla 2D.

OPT dla 2P:

$x_1 = 4, \ x_2 = 2$

OPT dla 2D:

$y_1 = 0, \ y_2 = \frac{3}{2}, \ y_3 = \frac{1}{8}$

Przykład.

$$(ZP)\ 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(ZD)\ 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

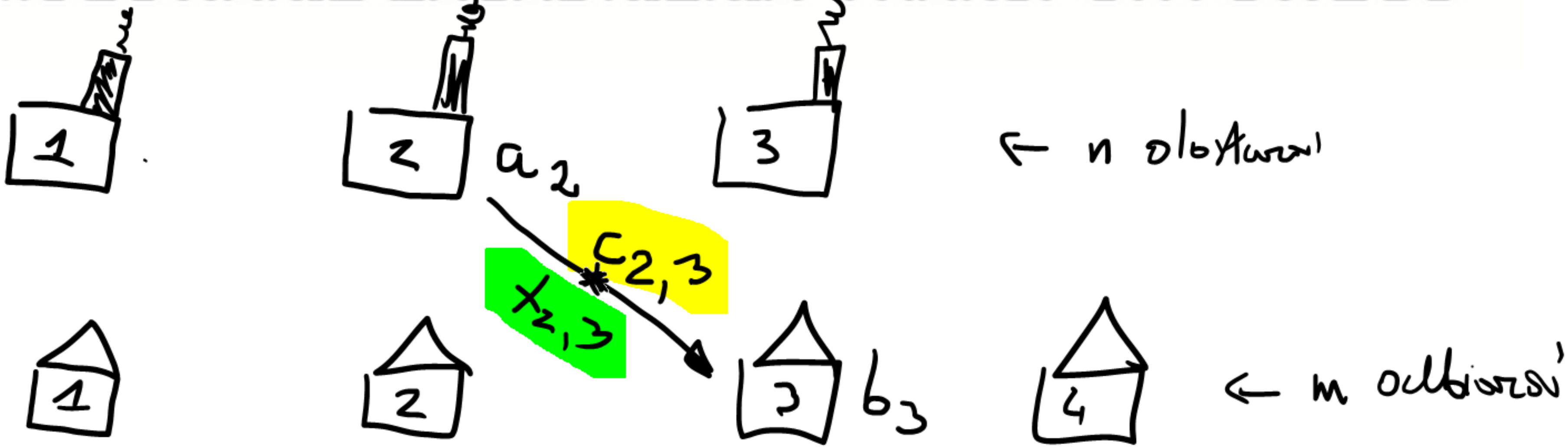
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ZP: $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$

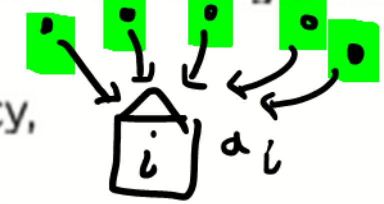
$\parallel$! :-)

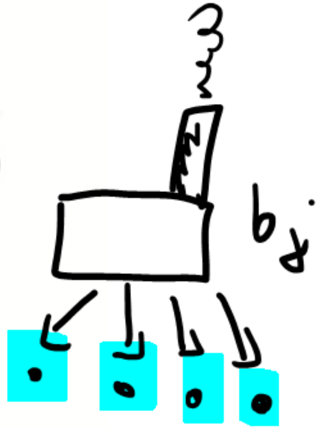
$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ ZD: $14 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{3}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8} = 12 + 2 = 14$

SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO



Do sformułowania zagadnienia wprowadzamy następujące oznaczenia:
n - ilość dostawców,
m - ilość odbiorców,
x_{ij} - ilość towaru dostarczana od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
c_{ij} - koszt transportu jednostki towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,
$a_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ - podaż i-tego dostawcy,
$b_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ - popyt j-tego odbiorcy.





Przy założeniu, że a_i, b_j są znane, celem jest minimalizacja całkowitego kosztu transportu:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$$

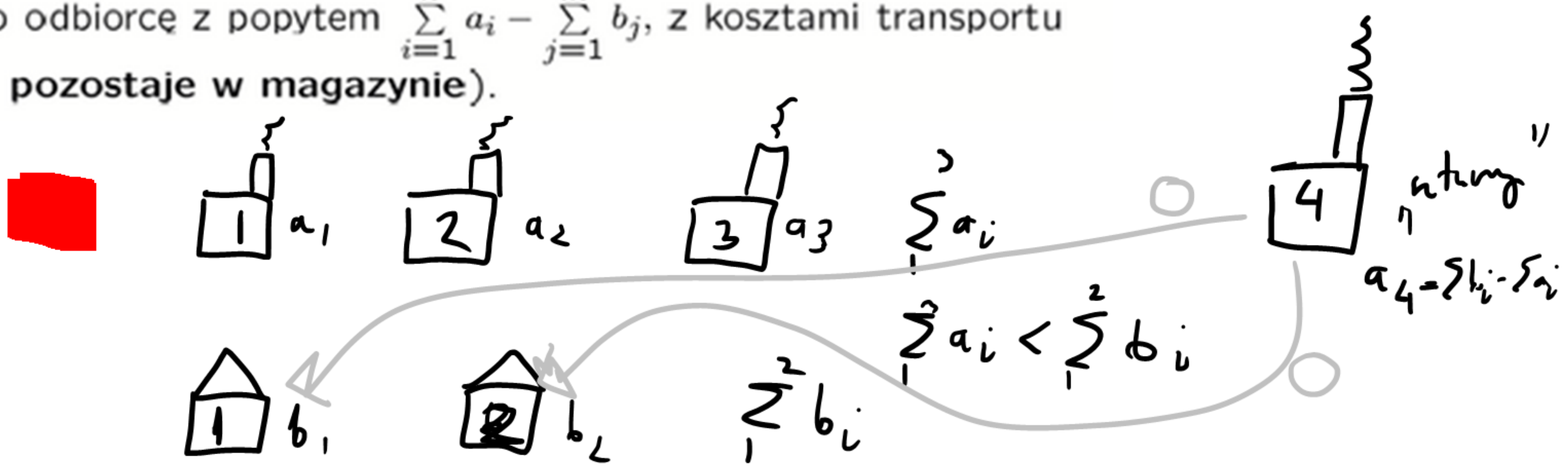
ZBILANSOWANE ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

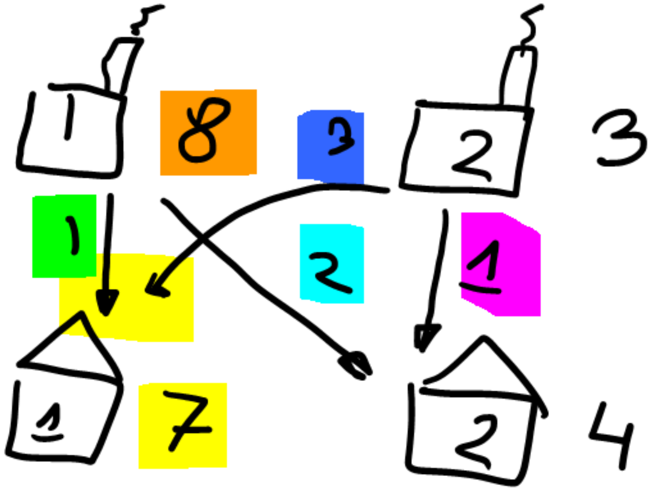
Problem jest **zbilansowany**, gdy cały towar znajduje odbiorców, a każdy odbiorca otrzymuje zamówiony towar:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Gdy problem nie jest zbilansowany, to tworzymy zadanie zbilansowane następująco:

- jeśli popyt przewyższa podaż, tzn. $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$, to wprowadzamy fikcyjnego dostawcę z podażą $\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$, z kosztami transportu 0 (**niezrealizowane życzenia**).
- jeśli podaż przewyższa popyt, tzn. $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$, to wprowadzamy fikcyjnego odbiorcę z popytem $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$, z kosztami transportu 0 (**towar pozostaje w magazynie**).

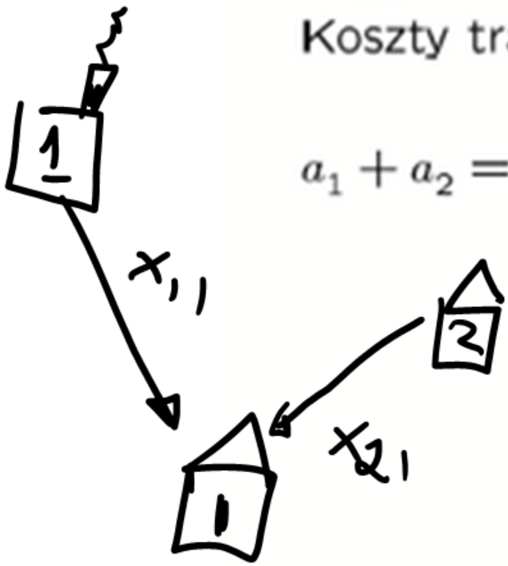




Przykład 1.

($n = 2$ dostawców, $m = 2$ odbiorców, zagadnienie zbilansowane ZT)

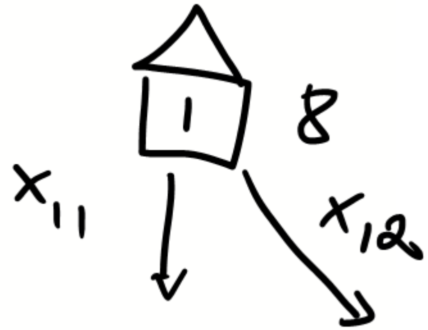
Podaż dostawców: $a_1 = 8$, $a_2 = 3$
Popyt odbiorców: $b_1 = 7$, $b_2 = 4$
Koszty transportu: $c_{11} = 1$, $c_{12} = 2$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 1$

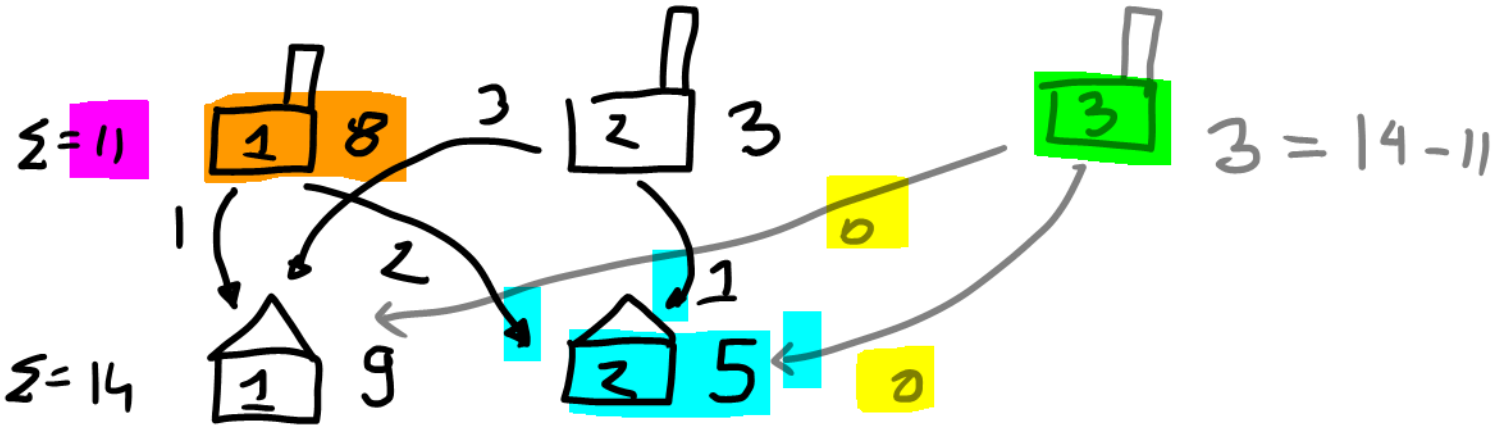


$a_1 + a_2 = 11$, $b_1 + b_2 = 11$ - zagadnienie zbilansowane

$$x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 8 \\ x_{21} + x_{22} = 3 \\ x_{11} + x_{21} = 7 \\ x_{12} + x_{22} = 4, \quad x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$





Przykład 2.
($n = 2$ dostawców, $m = 2$ odbiorców, zadanie niezbilansowane ZTN)

Odbiorcy zwiększyli popyt przy tej samej podaży:
podaż dostawców: $a_1 = 8,\ a_2 = 3$
popyt odbiorców: $b_1 = 9,\ b_2 = \cancel{14}\ 5$
koszty transportu: $c_{11} = 1,\ c_{12} = 2,\ c_{21} = 3,\ c_{22} = 1$

$a_1 + a_2 = 11, \quad b_1 + b_2 = 14$
$a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ - zadanie niezbilansowane, podaż $<$ popyt

wprowadzamy fikcyjnego dostawcę z podażą: $a_3 = 14 - 11 = 3$
oraz kosztami transportu: $c_{31} = 0,\ c_{32} = 0$

$$x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 0 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{32} \quad \to \quad \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 8 \\ x_{21} + x_{22} = 3 \\ x_{31} + x_{32} = 3 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 9 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5, \end{cases} \quad x_{ij} \geq 0.$$

ISTNIENIE ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO DLA ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO

Twierdzenie. Zbilansowne zagadnienie transportowe ma rozwiązanie optymalne.
Dowód. Macierz $X = [x_{ij}]$, gdzie

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k}, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m,$$

jest rozwiązaniem dopuszczalnym ZT (niekoniecznie optymalnym).
Mamy bowiem: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$,

$$i \in \{1, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \frac{a_i}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \sum_{j=1}^{m} b_j = a_i,$$

$$j \in \{1, \ldots, m\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{b_j}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \sum_{i=1}^{n} a_i = b_j.$$

Zatem zagadnienie nie jest sprzeczne. Teza wynika teraz z tego, że funkcja celu jest ograniczona z dołu.

Uwaga.
Dla zbilansowanego zagadnienia transportu z jednym dostawcą, tzn. $n = 1$ (lub z jednym odbiorcą, tzn. $m = 1$) zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest jednoelementowy.

Sprawdzimy to dla danych:
$n = 1$, $m \geq 1$, podaż: a_1, popyt: $b_1, \ldots, b_m$,
zbilansowanie: $a_1 = \sum_{j=1}^{m} b_j$,
warunki: $\sum_{j=1}^{m} x_{1j} = a_1$, $x_{1j} = b_j$, $1 \leq j \leq m$, $x_{1j} \geq 0$,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{array}\right] w_1 - \sum_{j=2}^{m+1} w_j \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 - \sum_{j=1}^{m} b_j = 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{array}\right]$$

Stąd otrzymamy $x_{1j} = b_j$, $1 \leq j \leq m$.

Dla $n \geq 1$, $m = 1$ sprawdza się analogicznie (ćwiczenie samodzielne).

Programování lineární celočíselné

omezení na proměnné, že jsou hodnotami celočíselnými

→ problém těžký obecně (NP-těžký)

...

PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

PROBLEM PLECAKOWY (problem NP-trudny)

S - ograniczenie na rozmiar plecaka

$a_1, a_2, \dots, a_n$ – przedmioty

$s(a_i)$ – rozmiar (waga) przedmiotu

$c(a_i)$ – koszt/zysk przedmiotu

PROBLEM: Wybrać najbardziej kosztowne przedmioty, ale tak, aby ich waga (suma) nie przekroczyła rozmiaru plecaka.

Np.:

	$s(a_i)$	$c(a_i)$
a_1	5	8
a_2	2	3
a_3	7	10
a_4	1	1
a_5	6	9
a_6	8	11
a_7	2	2

$S = 15$

PL całkowitoliczbowe (0/1-owe)

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli zabieramy przedmiot } a_i \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

PL

funkcja celu: $+$ 1

$$\max \sum_{i=1}^{n} c(a_i) \cdot x_i$$

0 0

ograniczenia: $+$ 1

$$\sum_{i=1}^{n} s(a_i) \cdot x_i \le S$$

0 0

$$x_i \in \{0,1\}$$

$$\max\ 8 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 9 \cdot x_5 + 11 \cdot x_6 + 2 \cdot x_7$$

$$\text{og.: } 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + x_4 + 6 \cdot x_5 + 8 \cdot x_6 + 2 \cdot x_7 \le 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0,1\}$$

PAKOWANIE PUDEŁEK (problem NP-trudny)

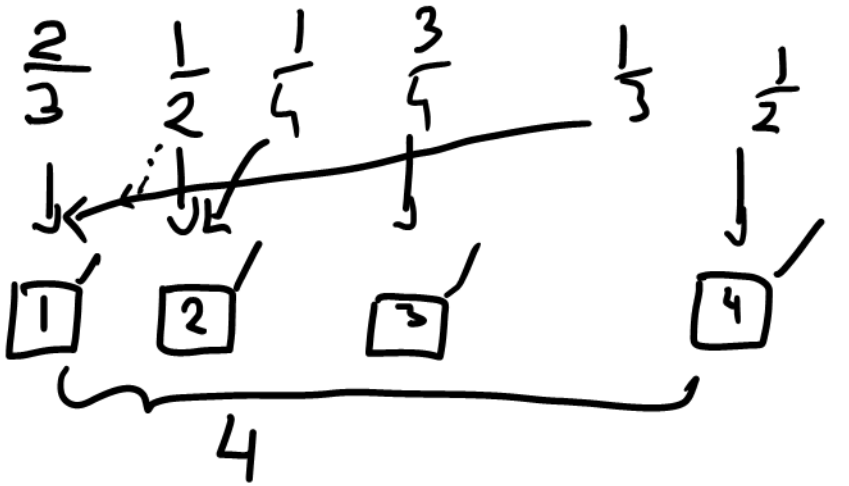
$a_1, a_2, \dots, a_n$ – przedmioty (liczby)

$a_i \in (0,1)$

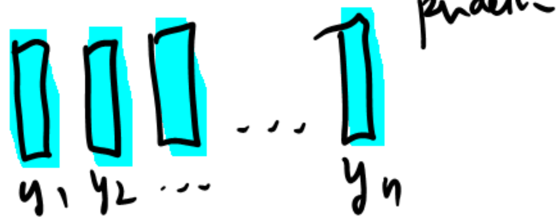
PROBLEM: Zapakować przedmioty do jak najmniejszej liczby jednostkowych pudełek.

Np. $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

OPT = 3



$\approx 1{,}7$



PL (0/1-owe)

Zauważmy, że liczba pudełek $\le n$.

y_j – zmienna dla j-tego pudełka – $\begin{cases} 1 & \text{użyto pudełko} \\ 0 & \text{nie użyto} \end{cases}$

$y_j \in \{0,1\}$

funkcja celu: $\min \sum_{j=1}^{n} y_j$

$x_{ij} \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 & \text{gdy przedmiot } a_i \text{ jest w pudełku } j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

ograniczenia:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ przedmiot jest w jednym pudełku

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot a_i \le y_j$ nie można przekroczyć rozmiaru (=1) pudełka

$x_{ij} = 0 \Leftarrow y_j = 0$ wszystkie i

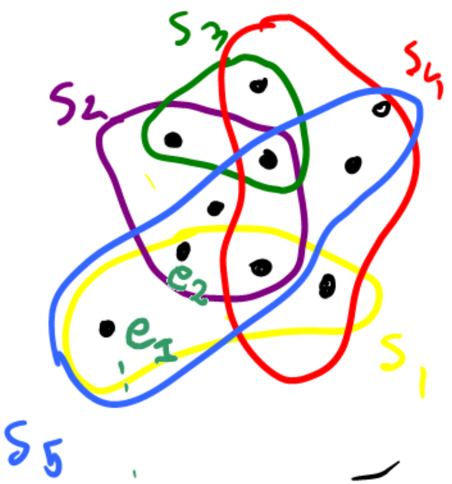
PROBLEM POKRYCIA ZBIORU (NP-trudny)

$U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – zbiór elementów

$\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, $S_i \subseteq U$ – rodzina podzbiorów

funkcja kosztu $c: \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$

PROBLEM: Wyznaczyć najtańsze pokrycie zbioru U.



pokrycie: np. S_1, S_3, S_5 ← koszt $= 13$

np. S_2, S_4, S_5 ← koszt $= 11$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$c(S)$	5	2	7	8	1

PL (0/1-owe)

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{zbiór } S_i \text{ wybrany} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

funkcja celu: $$\min \sum_{i=1}^{m} c(S_i) \cdot x_i$$

dla każdego elementu e: $$\sum_{i:\, e \in S_i} x_i \geq 1$$ ← element e musi należeć do jakiegoś zbioru

e_1: $x_1 + x_5 \geq 1$

e_2: $x_1 + x_2 + x_5 \geq 1$

...

PROBLEM LOKALIZACJI (NP-trudny)

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ – miasta

$D[i,j]$ – tablica odległości pomiędzy miastami M_i oraz M_j

L – ograniczenie na odległość

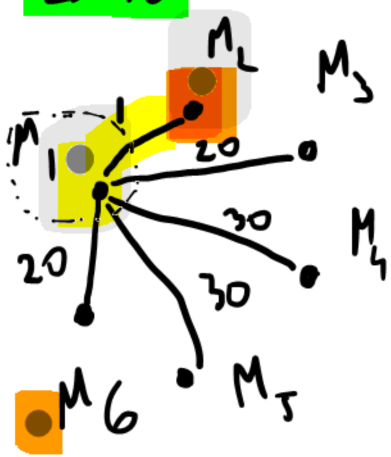
PROBLEM: Wyznaczyć jak najmniejszą liczbę szpitali tak, aby każdy mieszkaniec miasta miał szpital w odległości $\leq L$.

Np.:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1		1	20	30	30	20
M_2			25	35	20	10
M_3				15	30	20
M_4					15	25
M_5						15
M_6						

symetria

$L = 15$



PL (0/1-owe)

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy w mieście } M_i \text{ budujemy szpital} \\ 0 & \end{cases} \qquad x_i \in \{0,1\}$$

funkcja celu: $\min \sum_{i=1}^{n} x_i$

ograniczenia:

M_1: $x_1 + x_2 \geq 1$ — tylko M_1 lub M_2 są w dobrej $\leq L$ odległości

M_2: $x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$ — tylko M_1 lub M_2 lub M_6 są w dobrej odległości

M_3: $x_3 + x_4 \geq 1$

M_4: $x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$

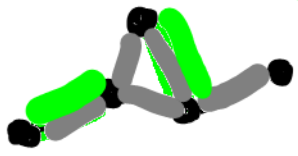
M_5: $x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$

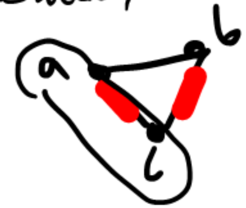
M_6: $x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$

SKOJARZENIA W GRAFACH (Całkowity/wielomianowy)

Mamy dany graf $G=(V,E)$.

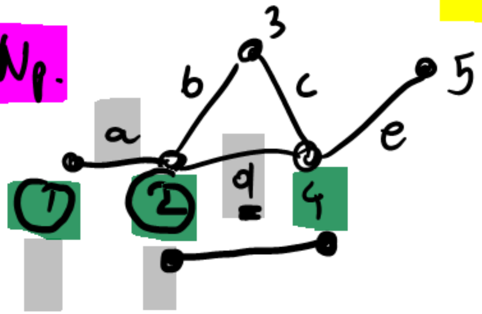
→ **skojarzenie**: niezależny zbiór krawędzi o różnych końcach





PROBLEM: Wyznaczyć najliczniejsze skojarzenie.

Np.



$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0,1\}$

1: $x_a \le 1$

2: $x_a + x_b + x_d \le 1$

3: $x_b + x_c \le 1$

4: $x_c + x_d + x_e \le 1$

5: $x_e \le 1$

$$\boxed{A \cdot x \le 1}$$

PL (0/1)

x_y - zmienna dla każdej krawędzi y

$$x_y \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 & \text{gdy wybieramy krawędź } y \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

funkcja celu: $\max \sum_{y \in E} x_y$

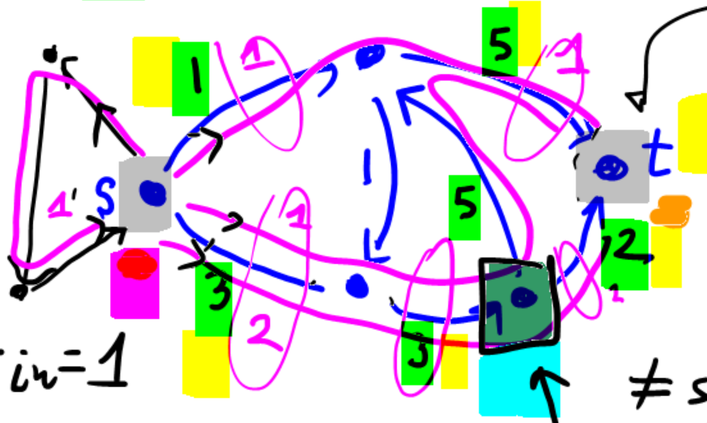
ograniczenia: dla każdego wierzchołka v: $\sum_{x_y \text{ ma koniec w } v} x_y \le 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Uwaga: Macierz A w PL ($Ax \le b$) jest unimodularna (dla każdej podmacierzy A' zachodzi $\det(A') \in \{-1,0,1\}$) } PL (0/1-owe) jest rozwiązalne w czasie wielomianowym

PRZEPŁYWY W SIECIACH



$\sum out = 0$

$\sum in = 3$

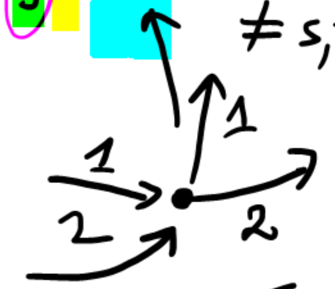
przepustowość łuku (i,j) $= p_{ij}$

$\sum in = 1$

$\sum out = 4$

$\sum out - \sum in = 3$

$\neq s,t$



$\sum in = \sum out$

PROBLEM: Wyznaczyć największy możliwy przepływ z s do t.

PL (całkowitoliczbowe)*

x_{ij} — wielkość przepływu od wierzchołka x_i do x_j

$O_i \longrightarrow O_j$

funkcja celu: $\max \left(\sum_{s \to i} x_{si} - \sum_{k \to s} x_{ks} \right)$

out in

Ograniczenia:

dla wierzchołka $i \notin \{s,t\}$

out $\sum_{i \to j} x_{ij} = \sum_{k \to i} x_{ki}$ in

oraz $0 \le x_{ij} \le p_{ij}$

$x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Uwaga*: Jeśli przepustowości są liczbami całkowitoliczbowymi, to istnieje przepływ całkowitoliczbowy.

wierzchołki obszaru dopuszczalnego mają całkowitoliczbowe współrzędne

PROBLEM 3SAT (problem NP-trudny)

Formuły Boolowskie

zmienne 0/1: $x_1, x_2, \dots, x_n$

formuła $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$

klauzule $\quad C_i = (a \vee b \vee c)$

a, b, c – zmienne lub ich negacje

PROBLEM: Czy istnieje takie podstawienie za zmienne, że formuła ma wartość 1?

Np.

$$F = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_2}$$

AND

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$ .... TAK

$x_1, x_2, x_3 \quad (1 \vee 1 \vee 1) = 1 \wedge (1 \vee 0 \vee 0) = 1$

$$F = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)}_{C_2}$$

AND

$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

ograniczenia

$C_1: \; x_1 + (1-x_2) + (1-x_3) \geq 1$ (*)

$C_2: \; x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ (**)

$x_1 = 1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0$

(*) $1+1+1 = 3 \geq 1$

(**) $1+0+0 \geq 1$

PL (zero-jedynkowe)

zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0,1\}$

ograniczenia:

(każda klauzula musi być spełniona)

$$C = (a \vee b \vee c)$$

x_i lub $\bar{x}_i$

$$a^* + b^* + c^* \geq 1$$

gdzie $a^* = \begin{cases} x_i & a = x_i \\ 1 - x_i & a = \bar{x}_i \end{cases}$

$b^* =$ —||—

$c^* =$

funkcja celu: ??? brak :)

np. max 0

Ponadto.... [1]

... w sformułowaniu zagadnienia pakowania z' np. !

- musi być wybrany albo przedmiot i lub przedmiot j

  dodatek: $x_i + x_j \geq 1$

- nie mogą być wybrane jednocześnie przedmiot i oraz przedmiot j

  dodatek: $x_i + x_j \leq 1$

- jeśli zostanie wybrany przedmiot i, to musi być wybrany także przedmiot j

  dodatek: $x_i \leq x_j$

  $x_i = 1 \Rightarrow x_j \geq 1 \; (x_j = 1)$

Ponadto... [2]

... w sformułowaniu zagadnienia pojawia się np.:

- x_i ~ wielkość produkcji przedmiotu i

„jeśli zaczynamy produkcję przedmiotu i, to musi być ona przynajmniej ≥ 1000"

$$x_i > 0 \Longrightarrow x_i \geq 1000$$

← to nie jest ograniczenie liniowe

to samo, co

(I) $x_i \leq 0$ lub $x_i \geq 1000$ (II)

ogr. liniowe lub ogr. liniowe

spełniony $x_i \leq 0$

wprowadzamy dodatkową zmienną $y_i \in \{0,1\}$

spełniony $x_i \geq 1000$

$1000 - x_i \leq 0$

I* $x_i \leq M \cdot y_i$

II* $1000 - x_i \leq M(1-y_i)$

spełnione oba !

M - odpowiednio duża stała (wynika z treści zadania)

$y_i = 0$:

$$\begin{cases} x_i \leq M\cdot 0 = 0 \\ 1000 - x_i \leq M \end{cases}$$

odpowiednio duże

$y_i = 1$:

$$\begin{cases} x_i \leq M\cdot 1 = M \\ 1000 - x_i \leq M\cdot(1-1) = 0 \end{cases}$$

$1000 \leq x_i$

Ponadto... [3]

... w sformułowaniu zagadnienia pojawia się np..

- x_i ~ wielkość produkcji przedmiotu i

„jeśli produkcja przedmiotu i wynosi > 500, to produkcja przedmiotu j wynosić nie więcej niż 100”

$$\underbrace{x_i > 500 \Longrightarrow x_j \le 100}_{\text{równoważne}}$$

$$\underbrace{x_i \le 500}_{\text{I linia}} \quad \text{lub} \quad \underbrace{x_j \le 100}_{\text{II linia}}$$

dodatkowa zmienna $y_i \in \{0,1\}$

spełniony $x_i \le 500$, $x_i - 500 \le 0$

spełniony $x_j \le 100$, $x_j - 100 \le 0$

$y_i = 0$: $\begin{cases} x_i - 500 \le 0 & \text{I} \\ x_j - 100 \le M & + \end{cases}$

$y_i = 1$: $\begin{cases} x_i - 500 \le M & + \\ x_j - 100 \le 0 & \text{II} \end{cases}$

I*: $x_i - 500 \le M \cdot y_i$

II*: $x_j - 100 \le M(1 - y_i)$

M – odpowiednio duża stała wynikająca z treści zadania | + +

Ponadto ... [4]

... w sformułowaniu zagadnień pojawia się iloczyn zmiennych 0/1-owych

x, y -- zmienne $\in \{0,1\}$

$$12\, x \cdot y \le 10$$

to nie jest ograniczenie liniowe

wprowadzamy zmienną $z \in \{0,1\}$

$$12 \cdot z \le 10$$

$$z \le x$$

$$z \le y$$

$$x + y - 1 \le z$$

3 dod. ogr.

$y \backslash x$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$x \cdot y = z$$

$x \cdot y = 0$ (x lub $y = 0$)

to $z = 0$

$z = 0$

to $x \cdot y = 0$

x lub $y = 0$

$z \le x$ | $x = 0$ to $z = 0$

$z \le y$ | $y = 0$ to $z = 0$

$x = 0$ lub $y = 0$

to $z = 0$!

$x + y - 1 \le z$

$z = 0$

to $x + y - 1 \le 0$, to $x + y \le 1$

to $x = 0$ lub $y = 0$!