

PROGRAMOWANIE LINIOWE — C.04

Z relacji zachodzących między zadaniem pierwotnym (ZP) a zadaniem dualnym (ZD) wynika, że:

1. w zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile nierówności w zadaniu pierwotnym (każdemu warunkowi w ZP odpowiada jedna zmienna w ZD);
2. w zadaniu dualnym jest tyle warunków, ile zmiennych w zadaniu pierwotnym,
3. wagi funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi w zadaniu dualnym;
4. wyrazy wolne zadania pierwotnego są wagami funkcji celu w zadaniu dualnym;
5. macierz współczynników zadania dualnego jest transpozycją macierzy współczynników zadania pierwotnego;
6. jeżeli zadanie jest na wyznaczenie maksimum, to zadanie dualne jest na wyznaczenie minimum i odwrotnie.

Ponadto, określając nierówności \leq dla zadania na wyznaczenie maksimum — a nierówności \geq dla zadania na wyznaczenie minimum — jako nierówności *typowe*, stosujemy następujące dodatkowe reguły tworzenia zadania dualnego:

7. jeżeli w ZP i -ty warunek jest typową nierównością, to w ZD odpowiadająca mu zmienna $y_i \geq 0$;
8. jeżeli w ZP i -ty warunek jest równością, to odpowiadająca mu zmienna y_i w ZD nie ma ograniczeń;
9. jeżeli w ZP i -ty warunek jest nietypową nierównością, to w ZD zmienna $y_i \leq 0$;
10. jeżeli w ZP zmienna $x_j \geq 0$, to j -ty warunek w ZD jest typową nierównością;
11. jeżeli w ZP na zmienną x_j nie nałożono ograniczeń, to j -ty warunek w ZD jest równością;
12. jeżeli w ZP zmienna $x_j \leq 0$, to j -ty warunek w ZD jest nietypową nierównością.

ZADANIE 4.1. Zapisz poniższy program liniowy w postaci dualnej.

$$\begin{array}{ll} \text{zmaksymalizować} & 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 \\ \text{przy zachowaniu warunków} & \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 \leq 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

ZADANIE 4.2. Zapisz poniższy program liniowy w postaci dualnej.

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{przy zachowaniu warunków} & \begin{array}{l} 4x_1 - 6x_2 - 5x_3 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

ZADANIE 4.3. Zapisz poniższy program liniowy w postaci dualnej.

$$\begin{aligned} & \text{zmaksymalizować} && 6x_1 + 8x_2 \\ \text{przy zachowaniu warunków} & 4x_1 + 6x_2 &\leq & 10 \\ & 3x_1 + x_2 &= & 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 &\geq & 2 \\ & x_2 &\geq & 0 \end{aligned}$$

ZADANIE 4.4* Zapisz poniższy program liniowy w postaci dualnej.

$$\begin{aligned} & \text{zminimalizować} && 3x_1 + 4x_2 - 2x_4 + x_5 \\ \text{przy zachowaniu warunków} & 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= & 3 \\ & 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 - 4x_5 &\leq & 4 \\ & x_2, x_3, x_4 &\geq & 0 \end{aligned}$$

ZADANIE 4.5* Zapisz poniższy program liniowy w postaci dualnej oraz wyznacz jego rozwiązanie (w postaci dualnej), a następnie (patrz uwaga niżej) wyznacz rozwiązanie programu pierwotnego.

$$\begin{aligned} & \text{zminimalizować} && 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 \\ \text{przy zachowaniu warunków} & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\geq & 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq & 5 \\ & x_1, x_2, x_3 &\geq & 0 \end{aligned}$$

Uwaga. Jeżeli x, y są rozwiązaniami dopuszczalnymi dla, odpowiednio, zadania pierwotnego (ZP) i dualnego (ZD), wówczas zachodzi:

- (1) x, y są rozwiązaniami optymalnymi dla – odpowiednio – ZP i ZD wtedy i tylko wtedy, gdy $y^T(b - Ax) = 0$ oraz $(y^T A - c^T)x = 0$;
- (2) x, y są rozwiązaniami optymalnymi dla – odpowiednio – ZP i ZD wtedy i tylko wtedy, gdy $c^T x = y^T b$.

ZADANIE 4.6. Dla podanego niżej zestawienia dostawców, podaży, odbiorców, popycie oraz kosztów transportu, sformułuj zadanie programowania liniowego, które wyznaczy taką ilość dostarczonego towaru od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy, że koszt transportu jest najmniejszy.

Podaż

Dostawca 1: 8
Dostawca 2: 3

Popyt

Odbiorca 1: 7
Odbiorca 2: (a) 4 (b) 8

Koszta transportu jednostki towaru od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy

	dostawca 1	dostawca 2
odbiorca 1	1	3
odbiorca 2	2	1