ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 2.1 (Wariacje z powtórzeniami)
▶ *Liczba ciągów długości k ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.*
▶ *Liczba funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi n^k.*

◀ **PRZYKŁAD**

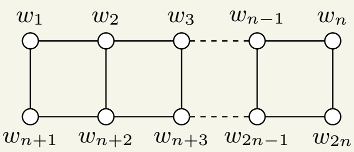
Ile jest 7-cyfrowych palindromicznych (tzn. które czytane od lewej do prawej są takie same, jak czytane od prawej do lewej) liczb naturalnych (w systemie dziesiętnym)?

Rozważmy 7-cyfrową liczbę naturalną $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$. Zauważmy, że $c_1 \neq 0$, a ponadto, z definicji słowa palindromicznego, otrzymujemy, że $c_2 = c_6, c_3 = c_5$ oraz $c_1 = c_7 \neq 0$. Na ile sposobów możemy wybać cyfry c_1, c_2, c_3 oraz c_4 — na $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Na powyższe rozwiązanie możemy też spojrzeć bardziej formalnie, odpowiadając na pytanie, ile jest funkcji $f\colon \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że $f(c_2) = f(c_6), f(c_3) = f(c_5)$ oraz $f(c_1) = f(c_7) \neq 0$. Równoważne jest to oczywiście odpowiedzi na pytanie, ile jest funkcji $g\colon \{c_1, c_2, c_3, c_4\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że $g(c_1) \neq 0$. Mając na uwadze twierdzenie 2.1, otrzymamy ten sam wynik.

◀ **PRZYKŁAD**

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} w grafie $L(2, n)$, zwanym *kratą* (patrz poniższy rysunek), a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę?



krata $L(2, n)$

Wybór najkrótszej ścieżki, zarówno tej z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} jak i tej z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1, równoważny jest wyborowi którejś z n krawędzi $w_1w_{n+1}, w_2w_{n+2}, \ldots, w_nw_{2n}$. Jako że takiego wyboru dokonujemy dwa razy, liczba możliwości wynosi n^2.

Istnieje również rozwiązanie bardziej formalne. Zauważmy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy najkrótszymi ścieżkami $w_1 \rightsquigarrow w_{2n}$ i $w_{2n} \rightsquigarrow w_1$ a funkcjami

$$f\colon \{w_1 \rightsquigarrow w_{2n}, w_{2n} \rightsquigarrow w_1\} \longrightarrow \{w_1w_{n+1}, w_2w_{n+2}, \ldots, w_nw_{2n}\},$$

a tym samym, na mocy twierdzenia 2.1, liczba takich różnych tras/funkcji wynosi n^2.

ZADANIE 2.1. Ile palindromów długości m można utworzyć korzystając z liter alfabetu n-elementowego?

ZADANIE 2.2. Wierzchołki $w_1, w_2, \ldots, w_n$ grafu pełnego K_n pokolorowano k kolorami $c_1, \ldots, c_k$. Ile jest możliwych pokolorowań takich, że kolor$(w_1) \in \{c_1, c_2\}$?

ZADANIE 2.3. Na ile sposobów można zorientować krawędzie (czyniąc je *łukami*) w kracie $L(2, n)$, otrzymując *sieć* (inaczej graf *skierowany* lub *digraf*)?

ZADANIE 2.4. Krawędzie ścieżki (grafu) pokolorowano mając do dyspozycji osiem kolorów $k_1, \ldots, k_8$. Ile wierzchołków ma ta ścieżka, jeśli wiadomo, że liczba możliwych pokolorowań wynosi 512?

ZADANIE 2.5. Mamy zbiór wierzchołków $V = \{a, b, c\}$. Ile różnych sieci (grafów skierowanych, bez pętli oraz multikrawędzi), niekoniecznie spójnych, możemy zbudować na tym zbiorze wierzchołków?

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

TWIERDZENIE 2.2 (Wariacje bez powtórzeń)
▶ *Liczba ciągów bez powtórzeń długości k ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

▶ *Liczba różnowartościowych funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi*

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

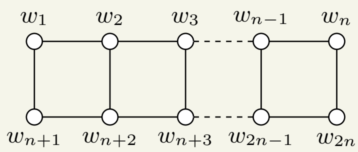
W kawiarni, do której przyszło siedem osób, było 10 gatunków ciastek. ◀ **PRZYKŁAD**
Każdy kupił jedno ciastko, przy czym każdy kupił inne. Na ile sposobów można było kupić ciastka?

Powyższą sytuację można utożsamić z różnowartościową funkcją

$$f\colon \{o_1, o_2, \dots, o_7\} \to \{c_1, c_2, \dots, c_{10}\},$$

która każdej z siedmiu osób przyporządkowuje inny rodzaj ciastka. Zatem liczba sposobów równa jest liczbie różnowartościowych funkcji f, która na mocy twierdzenia 2.2 wynosi $10 \cdot 9 \cdot \ \dots \ \cdot 4$.

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} ◀ **PRZYKŁAD**
w kracie $L(2,n)$, a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę, jeśli nie chce wracać tą samą ścieżką?



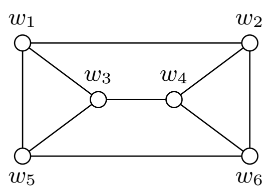
$L(2,n)$

Zauważmy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy rozważanymi trasami a różnowartościowymi funkcjami

$$f\colon \{w_1 \rightsquigarrow w_{2n}, w_{2n} \rightsquigarrow w_1\} \longrightarrow \{w_1 w_{n+1}, w_2 w_{n+2}, \dots, w_n w_{2n}\},$$

a tym samym, na mocy twierdzenia 2.2, liczba takich różnych tras/funkcji wynosi $n(n-1)$.

ZADANIE 2.6. Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki grafu zwanego *pryzmą* (patrz poniższy rysunek) mając do dyspozycji dziewięć kolorów tak, że każdy kolor używany jest co najwyżej jeden raz?



ZADANIE 2.7. Krawędzie grafu $G = (V, E)$ pokolorowano różnymi kolorami mając do dyspozycji pięć różnych kolorów $k_1, \dots, k_5$. Ile wierzchołków ma graf G, jeżeli wiadomo, że wszystkich takich pokolorowań jest 60, a ponadto G jest

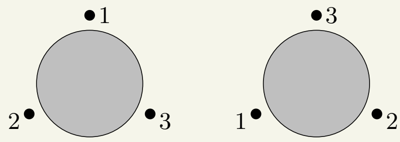
a) grafem spójnym;
b) spójnym pseudografem?

PERMUTACJE

Twierdzenie 2.3 (Permutacje)
Liczba permutacji (czyli n-elementowych ciągów bez powtórzeń o elementach ze zbioru n-elementowego) wynosi

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Na ile sposobów można rozsadzić n-osób przy okrągłym n-osobowym stole? ◀ **PRZYKŁAD**
Rozsadzenia przedstawione na poniższym rysunku traktujemy jako różne (tutaj $n = 3$).



Na usadzenie n osób $o_1, o_2, \dots, o_n$ na n krzesłach $k_1, k_2, \dots, k_n$ możemy patrzeć jak na róznowartościową funkcję $f\colon \{o_1, o_2, \dots, o_n\} \longrightarrow \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, a w konsekwencji jak na permutację elementów $o_1, o_2, \dots, o_n$. Zatem na mocy twierdzenia 2.3 liczba różnych takich usadzeń jest równa $n!$.

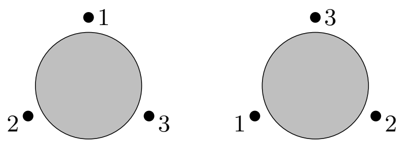
Ile jest różnych[1] ścieżek Hamiltona w grafie pełnym K_n. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wierzchołkami grafu K_n. Każda ścieżka Hamiltona odpowiada permutacji tych wierzchołków, a zatem na mocy twierdzenia 2.3 liczba ścieżek Hamiltona w grafie K_n wynosi $n!$.

ZADANIE 2.8. Na ile sposobów różnych można rozsadzić:

a) 3 osoby na 3-osobowej karuzeli;
b) 4 osoby na 4-osobowej karuzeli;
c) n osób na n-osobowej karuzeli?

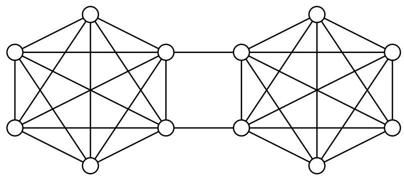
Uwaga. Jako że karuzela kręci się, dwa rozsadzenia uważamy za różne, jeżeli co najmniej jedna osoba ma co najmniej z jednej strony innego sąsiada — czyli np. rozsadzenia na poniższym rysunku są identyczne.



ZADANIE 2.9. Niech $w_1, w_2, \dots, w_n$ będą wierzchołkami grafu pełnego K_n. Ile jest różnych[1] ścieżek Hamiltona w grafie pełnym K_n, w których:

a) w_1 oraz w_2 są wierzchołkami końcowymi;
b) wierzchołki w_1 oraz w_2 są odwiedzane bezpośrednio po sobie, tzn. albo wierzchołek w_2 jest odwiedzony bezpośrednio po wierzchołku w_1 lub na odwrót;
c) wierzchołki w_1 oraz w_2 nie są odwiedzane bezpośrednio po sobie;
d) wierzchołek w_1 jest odwiedzony przed wierzchołkiem w_2 (niekoniecznie bezpośrednio)?

ZADANIE 2.10. Ile jest różnych cykli Hamiltona w grafie przedstawionym poniżej?



[1] Rozróżniamy początek i koniec, a zatem ścieżki $w_1 w_2 \dots w_n$ oraz $w_n w_{n-1} \dots w_1$ traktujemy w tym przypadku jako różne.

PERMUTACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 2.4 (Permutacje z powtórzeniami)
Niech dane będzie n elementów, gdzie elementów typu 1 (nierozróżnialnych) jest n_1, elementów typu 2 (nierozróżnialnych) jest $n_2, \dots,$ elementów typu k (nierozróżnialnych) jest n_k. Wówczas liczba sposobów, na które można uporządkować te elementy w rzędzie, wynosi

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Ile różnych 5-literowych słów (ciągów) można utworzyć z liter słowa: ◀ **PRZYKŁAD**

a) ULICA;
b) MARTA;
c) LALKA?

Mając na uwadze twierdzenie 2.4 oraz:

a) że wszystkie litery w słowie ULICA są różne, otrzymujemy 5!;
b) że w słowie MARTA są dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!}$;
c) że w słowie LALKA mamy dwie litery 'L' i dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!2!}$.

ZADANIE 2.11. Ile różnych nieparzystych liczb 8-cyfrowych można utworzyć z cyfr $2, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 9$?

ZADANIE 2.12. Na ile różnych sposobów można pokolorować wierzchołki ścieżki P_{10} mając do dyspozycji trzy kolory k_1, k_2, k_3, przy czym koloru k_1 trzeba użyć dokładnie cztery razy, koloru k_2 – też cztery razy, a koloru k_3 – dwa razy?

KOMBINACJE BEZ POWTÓRZEŃ

TWIERDZENIE 2.5 (Kombinacje bez powtórzeń)
Liczba wyborów k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na ile sposobów można podzielić 8-osobową grupę $\{o_1, \dots, o_8\}$ na dwie grupy, 5-osobową i 3-osobową, a na ile sposobów można podzielić tę grupę na dwie równoliczne grupy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że wybór trzech osób z ośmiu automatycznie wyznacza wybór pięciu osób z tej samej grupy. Tym samym, mając na uwadze twierdzenie 2.5, sposobów podziału 8-osobowej grupy na dwie grupy (5-osobową i 3-osobową) jest $\binom{8}{3} = 56$. Co więcej, powyższa obserwacja implikuje, że $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, a w ogólności $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Jeśli natomiast rozważymy wybór czteroosobowej grupy, wówczas musimy pamiętać, że temu samemu podziałowi odpowiadają dwa różne wybory grupy, tzn. wybór osób o_1, o_2, o_3, o_4 z ośmiu i otrzymany przez to podział $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \{o_5, o_6, o_7, o_8\}$ jest równoważny wyborowi osób o_5, o_6, o_7, o_8, bo podział jest ten sam, zatem rozważanych podziałów jest $\frac{1}{2} \cdot \binom{8}{4} = 35$.

Ile przekątnych ma n-wierzchołkowy wielokąt wypukły? ◀ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że każda przekątna odpowiada parze wierzchołków, za wyjątkiem tych par, które tworzą kolejne krawędzie wielokąta.. Tym samym, mając na uwadze twierdzenie 2.5, liczba takich przekątnych równa jest $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

ZADANIE 2.13. Z ilu osób składa się klasa, jeżeli wiadomo, że 2-osobową delegację można wybrać na 300 sposobów?

Przypomnijmy, że w kartach do gry mamy cztery *kolory* — jest to kier ♡, karo ♢, trefl ♣ oraz pik ♠. *Parę* stanowią dwie te same figury ze zbioru {9,10,W,D,K,A} (w przypadku talii złożonej z 24 kart) lub ze zbioru {2,3,4,5,6,7,8,9,10,W,D,K,A} (w przypadku talii złożonej z 52 kart); analogicznie, *trójkę* stanowią trzy te same figury, np. trzy damy, a *kareta* to cztery figury, np. kareta asów.

ZADANIE 2.14. Z talii 24 kart wybieramy 5 kart. Ile jest takich wyborów, w których dostaniemy:

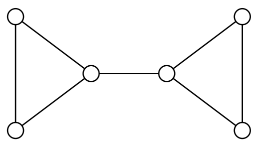
a) pięć kart w jednym kolorze;
b) jedną parę i jedną trójkę;
c) dwie pary różnych figur;
d) dwie pary?

ZADANIE 2.15. Znajdź liczbę rozdań przy grze w brydża, w których każdy z grających otrzyma dokładnie jednego asa i jednego króla.

DALSZE ZADANIA

ZADANIE 2.16. W pewnej grupie osób 45 regularnie pływa, 40 jeździ na rowerze, a 50 biega. Wiemy ponadto, że są 32 osoby, które biegają, ale nie jeżdżą na rowerze, 27 takich, które biegają i pływają, oraz 10 uprawiających wszystkie te trzy rodzaje aktywności. Ile osób biega, ale nie pływa i nie jeździ na rowerze?

ZADANIE 2.17. Mając do dysposyzji k różnych kolorów, na ile sposobów można pokolorować poniższy graf tak, aby dwa sąsiednie wierzchołki miały różne kolory?



ZADANIE 2.18. W poczekalni u lekarza w rzędzie z n krzeseł siedzi k pacjentów w ten sposób, że żadni dwaj z nich nie znajdują się na sąsiednich krzesłach. Na ile sposobów może być wybrany odpowiedni zbiór krzeseł, gdy pacjenci są (**a**) nierozróżnialni, (**b**) rozróżnialni?

Wskazówka. Rozważyć równoważną sytuację, w której każdy z k pacjentów przychodzi z własnym krzesłem i wstawia/dostawia je odpowiednio do stojących już $n - k$ krzeseł.

ZADANIE 2.19. Na ile sposobów można wybrać trzy liczby spośród liczb od 1 do 60 tak, aby ich suma była:

a) nieparzysta;
b) parzysta;
c) podzielna przez 3?

Wskazówka (c). Podzielmy zbiór $R = \{1, 2, \dots, 60\}$ na trzy (rozłączne) podzbiory R_0, R_1 i R_2, gdzie R_i jest zbiorem tych liczb z R, których reszta z dzielenia przez 3 daje i. Zauważmy, że np. suma dowolnych trzech elementów ze zbioru R_0 daje liczbę podzielną przez 3. Takich trójek jest $\binom{20}{3}$. Zatem — jak można i należy wybierać liczby ze zbiorów R_0, R_1 i R_2 tak, aby otrzymać żądaną sumę? Ile jest takich wyborów?

ZADANIE 2.20. Udowodnij równość $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

Wskazówka. Skorzystaj z własności $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

ZADANIE 2.21. Na ile sposobów można utworzyć trzy rozłączne komisje z osób wybranych z 20-osobowej grupy, jeśli muszą one mieć odpowiednio $3, 5$ oraz 7 członków?

ZADANIE 2.22. Na ile sposobów można podzielić grupę $3n$ zawodników na n drużyn po trzech zawodników w każdej?

ZADANIE 2.23. Kod Morse'a zbudowany jest ze skończonych ciągów długości kropek i kresek, które odpowiadają znakom alfanumerycznym. Długość kodu to suma wag poszczególnych elementów, przy czym kropka ma wagę 1, natomiast kreska ma wagę 2. Przykładowo, wszystkie kody długości 3 wyglądają następująco: $\cdots \quad \cdot - \quad - \cdot$. Ile jest wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 2.24.* *Zbalansowane* ciągi binarne długości $2n$ zawierają n zer i n jedynek oraz spełniają warunek: dla każdego k $(1 \leq k \leq 2n)$ na początkowych k pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek. A Wyznacz wszystkie takie ciągi dla $n = 4$. B. Wyznacz ich liczbę ogólnie dla n.

ZADANIE 2.25. Na Marsie mieszka trzystu Marsjan, z których każdy jest albo matematykiem, albo filozofem, albo ludożercą. Połowa ludożerców zajmuje się filozofią, połowa filozofów to matematycy, a połowa matematyków to ludożercy. Wiedząc, że żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i matematyką jednocześnie, ustal, z ilu osób składa się każda z tych grup.

LICZBY STIRLINGA DRUGIEGO RODZAJU ORAZ LICZBY BELLA

Liczba pogrupowań n różnych obiektów w dokładnie k grupach to *podzbiorowa liczba Stirlinga*, nazywana też *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Określa ona liczbę sposobów podziału n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów i oznaczana jest przez $\left\{ {n \atop k} \right\}$ lub $S(n,k)$.

Istnieje siedem sposobów podziału zbioru $X = \{1,2,3,4\}$ na dwie części. ◀ **PRZYKŁAD**

$\{1,2,3\} \cup \{4\}$, $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2\}$, $\{2,3,4\} \cup \{1\}$, $\{1,2\} \cup \{3,4\}$, $\{1,3\} \cup \{2,4\}$, $\{1,4\} \cup \{2,3\}$.

Stąd otrzymujemy, że $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. Zauważmy, że podział zbioru na dwie części tworzony jest zawsze przez niepusty podzbiór A oraz jego dopełnienie $X \setminus A$. Ponadto podział $A \cup (X \setminus A)$ jest równoważny podziałowi $(X \setminus A) \cup A$. W konsekwencji możemy zauważyć, że dla $n > 0$ zachodzi

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1.$$

TWIERDZENIE 2.6 (Liczby Stirlinga drugiego rodzaju)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają także następujacy wzór rekurencyjny:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

dla $0 < k < n$, *a ponadto* $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ *dla* $n \geq 0$ *oraz* $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ *dla* $n \geq 1$.

Wyznacz liczbę podziałów zbioru $\{1,2,3,4\}$ na trzy części. ◀ **PRZYKŁAD**

Szukana liczba to $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$, a jej wartość obliczamy reukrencyjnie korzystając z twierdzenia 2.6.

$$\begin{aligned} \left\{ {4 \atop 3} \right\} &= \left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {3 \atop 3} \right\} = \left(\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \cdot \left\{ {2 \atop 2} \right\} \right) + 3 \cdot 1 = \left[\left(\left\{ {1 \atop 0} \right\} + 1 \cdot \left\{ {1 \atop 1} \right\} \right) + 2 \cdot 1 \right] + 3 \\ &= [(0 + 1 \cdot 1) + 2] + 3 = 6. \end{aligned}$$

A zatem istnieje 6 podziałów zbioru $\{1,2,3,4\}$ na trzy części.

Liczba B_n możliwych pogrupowań n różnych obiektów nosi nazwę *liczby Bella*. A zatem liczba Bella B_n jest sumą liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Zbiór $\{1,2,3\}$ ma 5 podziałów: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{1\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

a zatem $B_3 = 5$.

Na ile sposobów można podzielić 4-osobową grupę na podgrupy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia czwartej liczby Bella B_4. Mając na uwadze ich podany wyżej wzór (w oparciu o liczby Stirlinga drugiego rodzaju), otrzymujemy, że

$$B_4 = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {4 \atop i} \right\} = \left\{ {4 \atop 0} \right\} + \left\{ {4 \atop 1} \right\} + \left\{ {4 \atop 2} \right\} + \left\{ {4 \atop 3} \right\} + \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

A zatem 4-osobową grupę możemy podzielić na podgrupy na 15 różnych sposobów.

TWIERDZENIE 2.7 (Liczby Bella)
Liczby Bella spełniają następujacy wzór rekurencyjny:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i,$$

gdzie $B_0 = 0$.

ZADANIE 2.26. Na ile sposobów można rozdzielić siedem różnych kwiatów do dwóch (nierozróżnialnych) doniczek tak, aby w każdej doniczce był przynajmniej jeden kwiat?

ZADANIE 2.27. Na ile sposobów można spakować osiem różnych książek do czterech (takich samych, dostatecznie dużych) pudeł tak, aby każde pudło zawierało przynajmniej jedną książkę?

ZADANIE 2.28. Wyznacz liczbę wszystkich surjekcji ze zbioru 8-elementowego na zbiór 5-elementowy.

ZADANIE 2.29. Wyznacz liczbę wszystkich możliwych podziałów zbioru 6-elementowego.

NIEUPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

Niech $n, k \in \{1, 2, \ldots\}$. Interesuje nas, na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników

$$n = a_1 + a_2, \ldots, a_k,$$

gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k > 0$. Każdy taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ nazywany jest (nieuporządkowanym) *podziałem liczby* n na k składników, a liczba takich podziałów oznaczana jest przez $P(n, k)$, natomiast liczba wszystkich podziałów liczby n (dla $k = 1, 2, \ldots, n$) oznaczana jest przez $P(n)$.

Istnieje jedenaście podziałów liczby 6. ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{array}{llllll}
6 \\
5 & 1 \\
4 & 2 \\
4 & 1 & 1 \\
3 & 3 \\
3 & 2 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Stąd otrzymujemy, że $P(6, 1) = 1$, $P(6, 2) = 3$, $P(6, 3) = 3$, $P(6, 4) = 2$, $P(6, 5) = 1$ oraz $P(6, 6) = 1$, a zatem $P(6) = 11$.

Dla podziału $P = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ liczby n można utworzyć tzw. *diagram Ferrersa*: ma on k wierszy i zawiera dokładnie a_i punktów w i-tym wierszu. *Podział sprzeżony* do podziału P otrzymujemy transponując (zamieniając) miesjcami wiersze i kolumny diagramu Ferrersa dla P, otrzymujac tym samym *sprzężony diagram Ferrersa*.

Rozważmy podział $(5, 3, 2)$ liczby 10. Diagram Ferrersa dla tego podziału wygląda następująco: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet
\end{array}$$

Sprzężony diagram Ferrersa wygląda natomiast tak:

$$\begin{array}{lll}
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet \\
\bullet \\
\bullet
\end{array}$$

i odpowiada on podziałowi $(3, 3, 2, 1, 1)$ liczby 10.

Zauważmy, że transpozycja diagramu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby n na k składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym k, co prowadzi do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.8 (Podziały liczby)
Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Wyznacz wszystkie podziały liczby 10 na trzy składniki. ◀ **PRZYKŁAD**

W podziale liczby 10 na trzy składniki największy składnik może być równy 8 — chodzi o podział $(8,1,1)$, a jego diagram Ferrersa jest następujący:

$$\begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

W oparciu o ten diagram możemy wygenerować wszystkie szukane podziały. Są one następujące:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}$$

Mamy osiem podziałów. Czy są to wszystkie podziały? Tak, niemniej dla pewności, mając na uwadze twierdzenie 2.8, możemy wygenerować jeszcze wszystkie podziały 10, w których największy składnik równy jest 3. Te podziały są następujące:

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Tych podziałów jest także osiem.

TWIERDZENIE 2.9 (Podziały liczby — zależność rekurencyjna)
Zachodzi następująca zależność rekurencyjna:

$$P(n,k) = \begin{cases} 0 & n = k = 0 \text{ lub } n < k; \\ 1 & k = 1 \text{ oraz } n \geq k; \\ P(n-1,k-1) + P(n-k,k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W oparciu o wzór rekurencyjny z twierdzenia 2.9 wyznacz liczbę $P(10,3)$. ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} P(10,3) &= P(9,2)+P(7,3) = (P(8,1)+P(7,2)) + (P(6,2)+P(4,3)) \\ &= [1+(P(6,1)+P(5,2))] + [(P(5,1)+P(4,2)) + (P(3,2)+P(1,3))] \\ &= 1+1+P(5,2)+1+P(4,2)+P(3,2)+0 \\ &= 3+(P(4,1)+P(3,2)) + (P(3,1)+P(2,2)) + (P(2,1)+P(1,2)) \\ &= 3+1+(P(2,1)+P(1,2))+1+1+1+0 = 7+1+0 = 8. \end{aligned}$$

ZADANIE 2.30. Wyznacz, ile jest podziałów liczby 11 na 5 składników:

a) generując wszystkie podziały;
b) w oparciu o wzór rekurencyjny.

UPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

W kolejce do kina stoi n osób. Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup? ◀ **PRZYKŁAD**

Załóżmy, że przed kinem stoi kolejka ośmiu osób

$$o_1o_2o_3o_4o_5o_6o_7o_8,$$

którą chcemy podzielić na trzy (niepuste) grupy. Dla przykładu, podział może być taki ($\times$ oznacza miejsce podziału):

$$o_1o_2o_3 \times o_4 \times o_5o_6o_7o_8$$

albo taki:

$$o_1o_2o_3o_4 \times o_5o_6o_7 \times o_8$$

Zauważmy, że każdy z takich podziałów odpowiada wstawieniu dwóch „bramek” $\times$ na dwóch pozycjach spośród siedmiu możliwych pozycji pomiędzy ośmioma osobami (aby powstały trzy grupy, z których każda jest niepusta). A zatem tutaj liczba takich podziałów kolejki wynosi $\binom{7}{2}$.

Analogicznie w ogólnym przypadku — każdy z szukanych podziałów n-osobowej kolejki odpowiada wstawieniu $k-1$ bramek $\times$ na $k-1$ pozycjach spośród $n-1$ możliwych pozycji pomiędzy n osobami (aby powstało k grup, z których każda jest niepusta). A zatem tutaj liczba takich podziałów wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

ZADANIE 2.31. W oparciu o odpowiedź do powyższego przykładu, wyznacz liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest dodatnią liczbą całkowitą.

ZADANIE 2.32. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest takich rozmieszczeń kul w komórkach, że żadna komórka nie jest pusta?

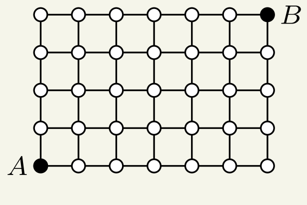
ZADANIE 2.33. Zastosuj odpowiedź do poprzedniego zadania w celu uzasadnienia, że liczba rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Wskazówka. Rozważ podstawienie $y_i = x_i + 1$ oraz odpowiednio powstałe równanie.

ZADANIE 2.34. Załóżmy, że mamy przedmioty w k różnych typach, że liczba przedmiotów każdego typu jest nieograniczona oraz że przedmioty jednego typu są nierozróżnialne. Na ile sposobów można wybrać n przedmiotów spośród tych k typów przy założeniu, że dopuszczalne są powtórzenia typów i że kolejność wybranych przedmiotów jest nieistotna?

ZADANIE 2.35. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń kul w komórkach?

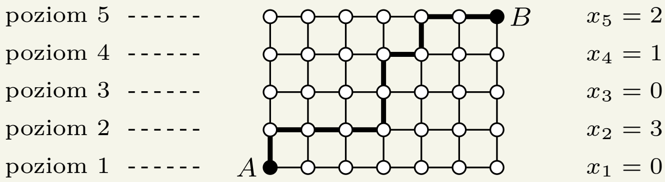
Rozważmy graf $L(5,7)$ (patrz rysunek poniżej). Chcemy przejść najkrótszą ścieżką z wierzchołka A do wierzchołka B. Ile jest takich ścieżek? ◀ **PRZYKŁAD**



Zauważmy, że każda najkrótsza ścieżka z wierzchołka A do wierzchołka B musi zawierać 10 krawędzi, z których dowolne cztery muszą być „pionowe”, a pozostałe muszą być „poziome”. Stąd liczba takich najkrótszych ścieżek jest równa liczbie sposobów wskazania, które cztery spośród dziesięciu krawędzi muszą być „pionowe”. Mamy zatem $\binom{10}{4}$ takich wyborów — a zatem i ścieżek.

W oparciu o odpowiedź do powyższego przykładu, wyznacz, ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą? ◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy jeszcze raz graf $L(5,7)$ oraz jakąś najkrótszą ścieżkę Π z wierzchołka A do wierzchołka B (przedstawione na rysunku poniżej). Niech x_i, $i = 1, \ldots, 5$, będzie liczbą poziomych krawędzi na i-tym poziomie na ścieżce Π (patrz rysunek poniżej): mamy $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1$ oraz $x_5 = 2$. Wówczas, jak łatwo zauważyć, zachodzi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$.



Z drugiej strony, jeśli rozważymy dowolne rozwiązanie równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, np. $x_1 = 4, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ oraz $x_5 = 2$, to takiemu rozwiązaniu możemy przyporządkować najkrótszą ścieżkę z wierzchołka A do wierzchołka B, która na każdym z poziomów i ma x_i poziomych krawędzi. W konsekwencji, mając na uwadze rozwiązanie przykładu powyżej, poszukiwana liczba rozwiazań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{10}{4}$.

ZASADA PODWÓJNEGO ZLICZANIA

Wykaż, że $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ◀ **PRZYKŁAD**

Z definicji lewa strona równania stanowi liczba wyborów k liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zauważmy teraz, że zbiory k-elementowe można podzielić na te, które zawierają liczbę n, oraz te, które jej nie zawierają. W pierwszym przypadku tych zbiorów jest $\binom{n-1}{k-1}$ (bo zakładając, że n należy do zbioru, pozostaje wybrać $k-1$ elementów ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$), w drugim natomiast tych zbiorów jest $\binom{n-1}{k}$ (bo wybieramy k liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$). I dokładnie suma liczby tych wyborów jest po prawej stronie równania.

Udowodnij równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$. ◀ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, a zatem lewa strona jest z definicji liczbą wyborów $n-k$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Z drugiej strony, zauważmy, że wśród wszystkich podzbiorów k-elementowych można wyróżnić te, które mają 1 jako najmniejszy element, następnie te, które mają 2 jako najmniejszy element, ..., i na koniec te, które mają $n-k+1$ jako najmniejszy element — i dokładnie suma liczby tych wyborów jest po prawej stronie równania.

ZADANIE 2.36. Udowodnij równość $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Wskazówka. Rozważ liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego.

ZADANIE 2.37. Udowodnij równość $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Wskazówka. Rozważ liczbę k-osobowych drużyn z kapitanem spośród n sportowców.

ZADANIE 2.38. Udowodnij równość $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

Wskazówka. Rozważ sytuację, w której mamy dokonać wyboru m osobowej delegacji spośród n osób, a następnie w tej delegacji wybrać k-osobowy zarząd.

ZADANIE 2.39. Udowodnij równość $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{m+n}{k}$.

Wskazówka. Rozważ wybór k osób spośród grupy n kobiet i m mężczyzn.

ZADANIE 2.40. Udowodnij równość $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Wskazówka. Rozważ wybór n osób spośród grupy n kobiet i n mężczyzn.

ZADANIE 2.41. Z poprzedniego zadania otrzymujemy, że chcąc wybrać z grupy $2n$ osób, składającej z n kobiet i n mężczyzn, podzbiór o takiej samej liczbie kobiet i mężczyzn, podzbiór ten może być wybrany na $\binom{2n}{n}$ sposobów. Zakładając, że po wybraniu takiego podzbioru chcemy ustalić ponadto przywódcę wśród mężczyzn i przywódczynię wśród kobiet, uzasadnij, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$.

ZADANIE 2.42. Udowodnij równość $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k\binom{n}{k}$.

Wskazówka. Rozważ kolorowanie k spośród n obiektów, mając do dyspozycji dwa kolory.

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

TWIERDZENIE 2.10 (Zasada włączania i wyłączania)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$
$$|\bigcup_{i=1}^{n}| = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|, \text{ gdzie } A_I = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Wyznacz liczbę elementów $|A \cap B \cap C|$ oraz $|C|$ wiedząc, że $|A| = 12$, $|B| = 10$, $|A \cap B| = 4$, $|B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 2$, $|A \cup B \cup C| = 20$. ◀ **PRZYKŁAD**

Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że $|C| + |A \cap B \cap C| = 6$. Zauważmy, że $|A \cap B \cap C| \leq |B \cap C| = 2$, a zatem $|A \cap B \cap C|$ może być równe $0, 1$ lub 2. Otrzymujemy wtedy, że $|C| \in \{4, 5, 6\}$.

Oblicz, ile dodatnich liczb mniejszych od 100 jest podzielnych przez $2, 3$ lub 5. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 99\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:
– $|D_2| = \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 49$, $|D_3| = \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 33$, $|D_5| = \lfloor \frac{99}{5} \rfloor = 19$;
– $|D_2 \cap D_3| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 3} \rfloor = 16$, $|D_2 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 5} \rfloor = 9$, $|D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{3 \cdot 5} \rfloor = 6$;
– $|D_2 \cap D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor = 3$.
Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że
$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 49 + 33 + 19 - 16 - 9 - 6 + 3 = 73.$$

ZADANIE 2.43. Wyznacz liczbę elementów $|A \cap B \cap C|$ oraz $|C|$ wiedząc, że $|A| = 10$, $|B| = 9$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 1$, $|B \cap C| = 1$, $|A \cup B \cup C| = 18$.

ZADANIE 2.44. W grupie 30 studentów 20 lubi grać w piłkę nożną, 15 – w koszykówkę, a kilku – w siatkówkę. W piłkę nożną i koszykówkę lubi grać 10 osób, w piłkę nożną i siatkówkę – 3 osoby, a w koszykówkę i siatkówkę – 2 osoby. Ponadto tylko jedna osoba lubi grać we wszystkie trzy gry. Ile osób lubi grać tylko w siatkówkę?

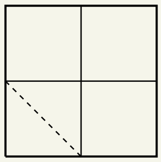
ZADANIE 2.45. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, \dots, 99\}$, które nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5$ lub 7?

ZADANIE 2.46. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, \dots, 2000\}$, które są podzielne przez $9, 11, 13$ lub 15.

ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

TWIERDZENIE 2.11 (Zasada szufladkowa Dirichleta)
Jeśli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, wówczas w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do wnętrza kwadratu Q o boku 4 cm zawsze są dwa punkty odległe od siebie o mniej niż 3 cm. ◀ **PRZYKŁAD**

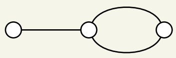


Podzielmy kwadrat Q na cztery kwadraty o wymiarach 2×2 cm (patrz rysunek powyżej). Traktując teraz te kwadraty jako szufladki, zauważmy, że mając pięć dowolnych punktów należących do Q, mając na uwadze twierdzenie 2.11, wśród nich znajdą się na pewno dwa, które należą do jakiejś szufladki. Jako że dla dowolnych dwóch punktów w kwadracie o boku a ich odległość od siebie wynosi co najwyżej długość przekątnej tegoż kwadratu, czyli $a\sqrt{2}$, a zatem wspomniane wyżej dwa punkty są w odległości co najwyżej $2\sqrt{2} < 3$.

Pewna grupa ludzi przywitała się podając sobie ręce. Nikt nie witał się z samym sobą, a żadna para nie witała się więcej niż raz. Wykaż, że istnieją dwie osoby, które witały się tyle samo razy. ◀ **PRZYKŁAD**

Powyższą sytuację można zamodelować jako graf (prosty) $G = (V, E)$, gdzie zbiorem wierzchołków jest zbiór osób, a dwa wierzchołki są sąsiednie, jeśli odpowiadające im osoby przywitały się (podając sobie ręce). Wówczas rozważana własność równoważna jest następującej: graf G zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

Zauważmy teraz, że w grafie o n wierzchołkach nie może zaistnieć sytuacja, że jakiś wierzchołek jest stopnia 0 (nie jest sąsiedni z żadnym z wierzchołków), a jakiś inny stopnia $n-1$ (jest sąsiedni ze wszystkimi). Zatem dopuszczalne są albo stopnie $0, 1, \ldots, n-2$ albo $1, \ldots, n-1$. Jako że mamy n wierzchołków i tylko $n-1$ możliwych wartości stopni (w każdej z dwóch sytuacji), zatem, mając na uwadze twierdzenie 2.11 istnieją dwa wierzchołki o tym samym stopniu.



Naturalnym jest pytanie, że rozważane stwierdzenie jest prawdziwe w multigrafach. Otóż nie jest — patrz np. 3-wierzchołkowy multigraf powyżej, gdzie stopnie wierzchołków wynoszą odpowiednio $1, 3, 2$ (od lewej do prawej).

ZADANIE 2.47. W grupie stu wysportowanych studentów 85 gra w piłkę nożną, 80 – w tenisa, 70 – w siatkówkę, a 66 biega. Czy wśród tych studentów znajduje się taki, który trenuje wszystkie te dyscypliny sportowe?

ZADANIE 2.48. Uzasadnij, że wśród dowolnych czternastu liczb naturalnych znajdziemy dwie, które przy dzieleniu przez 13 dają tę samą resztę.

ZADANIE 2.49. Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do trójkąta równobocznego o boku długści 2 cm zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż 1 cm.

ZADANIE 2.50. Niech O będzie kołem o promieniu $r = 1$ cm. Niech $S \subset O$ będzie takim zbiorem punktów należącym do koła, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami z S wynosi przynajmniej 1 cm. Uzasadnij, że $|S| \leq 6$.

ZADANIE 2.51. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych będzie istniała para liczb różniących się o wielokrotność n.

Wskazówka. Mając dane liczby $l_0, \ldots, l_n$ rozważ n szufladek ponumerowanych $0, 1, \ldots, n - 1$. Następnie rozważ każdą z liczb $l_i - l_0$ i włóż ją do szufladki odpowiadającej reszcie z dzielenia tej liczby przez n.

ZADANIE 2.52. Ułamek $\frac{m}{k}$ przedstawiamy w postaci dziesiętnej. Udowodnij, że okres tego ułamka jest nie większy niż k.

Wskazówka. Rozważ algorytm dzielenia m przez k.

ZADANIE 2.53. Mając danych dziesięć dowolnych różnych całkowitych liczb dodatnich mniejszych od 107 pokazać, że będą istniały dwa rozłączne podzbiory tych liczb, których elementy dają taką samą sumę.

Wskazówka. Ile wynosi najmniejsza i największa możliwa suma do uzyskania z dowolnego niepustego podzbioru zbioru dowolnych dziecięciu różnych liczb dodatnich mniejszych od 107? A ile jest niepustych podzbiorów dowolnego zbioru 10-elementowego?

Zadanie 2.54.* Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ istnieje taka, która jest wielokrotnością innej.

Wskazówka. Rozważ n szuflad ponumerowanych kolejnymi liczbami nieparzystymi $1, 3, \ldots, 2n - 1$. Każdą z wylosowanych liczb wkładamy do szuflady z numerem m, jeżeli $k = 2^r m$ dla jakiegoś $r \geq 0$.

ALGORYTMY GENEROWANIA PODZBIORÓW ORAZ PERMUTACJI

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem (prostym) zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania podzbiorów zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G wypisze wszystkie jego podgrafy, które są grafami pełnymi. ●●●

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania podzbiorów k-elementowych zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G oraz liczby naturalnej $2 \leq k \leq n$ wypisze wszystkie jego k-wierzchołkowe indukowane podgrafy, które są 2-regularne. ●●●

Niech $G = (V, A)$ będzie n-wierzchołkowym grafem zadanym w postaci macierzy sąsiedztwa $A_{n\times n}$. W oparciu o algorytm generowania permutacji zaimplementuj procedurę, która (dla tak zadanego na wejściu) grafu G wypisze wszystkie jego ścieżki Hamiltona. ●●●

Algorytm generowania podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\emptyset$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze A:
  - znajdujemy największy element a nie należący do A, czyli
    $$a = \max\{i \notin A \ : \ i \in \{1, 2 \ldots, n\}\};$$
  - jeżeli nie ma takiego a, to rozważany podzbiór A jest ostatnim – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, dodajemy a do zbioru A, a następnie usuwamy z A wszystkie elementy większe od a.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Spośród elementów nienależących do A algorytm znajduje ten największy, czyli $a = 5$. Wstawiamy 5 do A i usuwamy wszystkie $x > 5$, czyli tutaj tylko 6, otrzymując podzbiór $\{1, 2, 3, 5\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

ZADANIE 2.55. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 2.56. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 7\}$ poczynając od podzbioru $\{1, 2, 3, 5\}$.

Algorytm generowania k-elementowych podzbiorów $\{1, \ldots, n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\{1, \ldots, k\}$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, gdzie $a_1 < \cdots < a_k$:
  - znajdujemy najmniejsze i takie, że $a_i + 1 \notin A$;
  - jeżeli $a_i = a_n$, to rozważany podzbiór $A = \{n - k + 1, \ldots, n\}$ jest ostatnim – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, zwiększamy a_i o jeden, a elementy mniejsze od a_i zamieniamy na $i - 1$ najmniejszych kolejnych liczb, tzn. $a_j := j$, dla $j < i$.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $\{2, 3, 4, 6\}$. Algorytm znajduje $i = 3$, bo $a_i = 4$ i $a_i + 1 = 5 \notin \{2, 3, 4, 6\}$. Zatem $a_i := a_i + 1 = 5$, a elementy a_1, a_2 przyjmują odpowiednio wartości 1 i 2. Zatem kolejny podzbiór to $\{1, 2, 5, 6\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

ZADANIE 2.57. Wypisz 10 kolejnych 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 2.58. Wypisz 10 kolejnych 5-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Algorytm generowania permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

- pierwsza permutacja to $a_i = i$, dla $1 \leq i \leq n$,
- kolejna permutacja po permutacji $(a_1 \ldots a_n)$:
  - znajdujemy największe j spełniające warunek $a_j < a_{j+1}$;
  - jeżeli nie ma takiego j, to rozważana permutacja jest permutacją ostatnią – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, zamieniamy a_j z najmniejszym a_k takim, że $a_k > a_j$ i $k > j$, a następnie odwracamy porządek elementów $a_{j+1}, \ldots, a_n$.

◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy permutację (436521). Algorytm znajduje $j = 2$ i $a_j = 3$. Mamy $3 < 6 = a_3$ oraz $3 < 5 = a_4$, zatem zamieniamy a_2 z a_4. Następnie odwracamy kolejność elementów a_3, a_4, a_5, a_6, otrzymując (451236).

ZADANIE 2.59. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 6\}$ poczynając od permutacji (456321).

ZADANIE 2.60. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 7\}$ poczynając od permutacji (5463721).

PERMUTACJE RAZ JESZCZE*

■ Przypomnijmy, że na permutację n-elementową można patrzeć jak na dowolną różnowartościową funkcję ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na ten sam zbiór. Na oznaczenie permutacji π używa się często zapisu

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Przykładem permutacji jest

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

która jest funkcją przyjmującą następujące wartości: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 3$ oraz $\pi(5) = 1$. Dwie permutacje można składać tak, jak się składa funkcje. Złożenie permutacji π_1 i π_2 określone jest wzorem

$$\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x)).$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oraz } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ich złożenie $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ wynosi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ponieważ $\pi(1) = \pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(3) = 4$, $\pi(2) = \pi_1(\pi_2(2)) = \pi_1(1) = 2$,
$\pi(3) = \pi_1(\pi_2(3)) = \pi_1(4) = 3$, oraz $\pi(4) = \pi_1(\pi_2(4)) = \pi_1(2) = 1$.
Ponadto, jako że $\pi(2) = 2$ i $\pi(3) = 3$, to elementy 1 i 2 są *punktami stałymi* permutacji π.

■ Mówimy, że x jest *punktem stałym* permutacji $\pi\colon X \longrightarrow X$, jeśli $\pi(x) = x$. *Nieporządek* na zbiorze X jest permutacją π spełniającą warunek, że $\pi(x) \neq x$ dla każdego $x \in X$ (innymi słowy, nieporządek jest permutacją bez punktów stałych).

TWIERDZENIE 2.12 (Nieporządki)
Liczba D_n nieporządków dla n-elementowego zbioru X, nazywana dolną silnią *i oznaczana symbolem $!n$, dana jest wzorem*

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Liczbę D_n można też określić rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} !0 &= 1, \\ !1 &= 0, \\ !n &= (n-1)(!(n-1)+!(n-2)). \end{aligned}$$

Istnieje $3! = 6$ permutacji zbioru trzyelementowego: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nieporządki są jednak tylko dwa, ponieważ ze wzoru reukrencyjnego mamy:

$$!3 = (3-1)(!(3-1)+!(3-2)) = 2(!2+!1) = 2((2-1)(!(2-1)+!(2-2)) + 0) = 2(1((!1+!0)) = 2.$$

Są nimi permutacje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ZADANIE 2.61. W biegu bierze udział sześciu zawodników z (różnymi) numerami startowymi od 1 do 6. Na ile sposobów może zakończyć się ten bieg tak, aby każdy z zawodników zajął miejsce różne od swego numeru startowego?

ZADANIE 2.62. Nauczyciel przeprowadził kartkówkę dla pięciu uczniów. Kartkówki chce rozdać do sprawdzenia (tym) samym uczniom. Na ile sposobów może to zrobić tak, żeby żaden z uczniów nie dostał do sprawdzenia swojej pracy?

■ Zbiór S_n wszystkich permutacji na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem złożenia ma następujące własności:

a) Złożenie permutacji jest łączne, czyli dla każdych trzech permutacji π_1, π_2 oraz π_3 zachodzi

$$\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3.$$

b) Wśród permutacji istnieje identyczność id, czyli permutacja, która każdemu x z dziedziny przypisuje wartość $id(x) = x$. Identyczność jest elementem neutralnym operacji składania permutacji, ponieważ dla każdej permutacji π zachodzi

$$\pi \circ id = id \circ \pi = \pi.$$

c) Dla każdej permutacji π istnieje permutacja odwrotna (funkcja odwrotna) π^{-1} spełniająca warunek

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id.$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutacją odwrotną π^{-1} jest

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Możemy sprawdzić np. dla $x = 3$:

$$\pi \circ \pi^{-1}(3) = \pi(\pi^{-1}(3)) = \pi(4) = 3.$$

Wyznaczenie permutacji odwrotnej odbywa się w następujący sposób: jeśli $\pi(x) = y$, to $\pi^{-1}(y) = x$, gdyż wówczas otrzymamy $\pi \circ \pi^{-1}(y) = \pi(\pi^{-1}(y)) = \pi(x) = y = id(y)$.

ZADANIE 2.63. Mając dane poniżej permutacje π_1 i π_2, oblicz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^{-1}, π_2^{-1}, a następnie wyznacz ich punkty stałe.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ZADANIE 2.64. Wyznacz liczbę permutacji π ze zbioru S_6, które spełniają $\pi^2 = id$, $\pi \neq id$.

■ Często stosuje się *cykliczną* notację permutacji. Rozważmy dla przykładu permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\pi(1) = 2, \pi(2) = 5$ oraz $\pi(5) = 1$ — mówimy tym samym, że elementy $1, 2$ oraz 5 tworzą *cykl* (1 2 5) długości 3. Analogicznie, mając na uwadze, że $\pi(3) = 4$ oraz $\pi(4) = 3$, otrzymujemy cykl (3 4) długości 2. Permutację π możemy teraz zapisać jako

$$\pi = (1\ 2\ 5) \circ (3\ 4),$$

albo równoważnie

$$\pi = (1\ 2\ 5)(3\ 4) \quad \text{(tzn. bez znaku operatora } \circ\text{)}.$$

■ Każdą permutację π zbioru $X = \{1, \ldots, n\}$ możemy rozłożyć na rozłączne cykle w sposób następujący:

- Wybieramy dowolny element $x \in X$, który nie jest jeszcze w żadnym cyklu.
- Iterujemy permutację π otrzymując kolejno:

$$x, \pi^1(x), \pi^2(x), \pi^3(x), \ldots$$

aż do uzyskania $\pi^j(x) = x$, gdzie $\pi^i(x) = \underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{i \text{ razy}}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, j$.

- Dodajemy do rozkładu cykl $\Big(x\ \pi^1(x)\ \pi^2(x)\ \pi^3(x)\ \ldots\ \pi^{j-1}(x)\Big)$.
- Jeśli w zbiorze X pozostały elementy niepokryte przez żaden cykl, to wracamy do kroku pierszego.

■ Jeśli permutacja π złożona jest z k rozłącznych cykli, to zapisujemy ją jako

$$\pi = (x_1\ \ldots)(x_2\ \ldots)\ldots(x_k\ \ldots),$$

gdzie w kolejnych nawiasach są elementy kolejnych cykli zaczynających się odpowiednio od $x_1, \ldots, x_k$. Należy podkreślić, że nie ma znaczenia kolejność cykli, ani to, od jakiego elementu zaczynamy cykl — np. (1 2 5)(3 4) i (3 4)(2 5 1) oznaczają tę samą permutację — ważne natomiast są długości cykli i kolejność elementów je tworzących. A dokładnie, zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.13 (Rozkład permutacji na cykle)
Rozkład permutacji na cykle jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności cykli i elementów początkowych.

Rozważmy permutację ◄ **PRZYKŁAD**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozkład π na cykle jest następujący:

- pierwszy cykl: $1, \pi(1) = 3, \pi(3) = 7, \pi(7) = 6, \pi(6) = 2, \pi(2) = 4, \pi(4) = 1$;
- drugi cykl: $5, \pi(5) = 5$, zatem 5 jest punktem stałym permutacji π;
- trzeci cykl: $8, \pi(8) = 9, \pi(9) = 8$.

Otrzymujemy ostatecznie $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$.

ZADANIE 2.65. Niech $\pi_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)$ oraz $\pi_2 = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 6)(4)(8)$. Wyznacz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^2, π_1^3, π_2^2, π_2^3 oraz π_1^{-1}, następnie podaj liczbę punktów stałych każdej z tych permutacji oraz przedstaw te permutacje w postaci cyklicznej.

ZADANIE 2.66. Permutacja $\pi \in S_n$ jest nazywana *cykliczną*, jeśli jest postać w notacji cyklicznej składa się z jednego cyklu długości n. Uzasadnij, że istnieje dokładnie $(n-1)!$ permutacji cyklicznych w zbiorze S_n.

Dwanaście kart ponumerowanych $1, \ldots, 12$ leży na stole w następujący sposób: ◄ **PRZYKŁAD**

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

Zbieramy te karty od lewej do prawej, z kolejnych 4 wierszy, a następnie rozkładamy je, ale tym razem z góry na dół, w kolejnych 3 kolumnach.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}$$

Ile razy musimy powtórzyć powyższą operację, aby otrzymać pierwotne ułożenie kart?

Niech π będzie permutacją, która określa zmianę ułożenia kart, a dokładnie, mamy $\pi(i) = j$, jeśli karta i pojawia się na pozycji zajmowanej uprzednio przez kartę j. Wówczas notacja cykliczna π jest postaci $(1)(2\ 4\ 10\ 6\ 5)(3\ 7\ 8\ 11\ 9)(12)$. Cykle (1) oraz (12) oznaczają, że karty 1 i 12 zawsze pozostają na swoim miejscu. Jako że pozostałe cykle mają długość 5, dokładnie ta liczba powtórnych przełożeń kart wystarczy, aby znalazły się one w swoim pierwotnym ułożeniu. (Zauważmy także, że $\pi^5 = id$.)

ZADANIE 2.67. Rozwiąż powyższy problem z kartami przy założeniu, że dostępnych jest 20 kart i rozważamy ułożenie postaci: 5 wierszy po 4 karty.

■ *Typem permutacji* π nazywamy wektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie c_i jest liczbą cykli długości i w rozkładzie π na cykle. Zazwyczaj typ permutacji zapisuje się jako $[1^{c_1} 2^{c_2} \ldots n^{c_n}]$, przy czym często pomija się te wartości, dla których $c_i = 0$.

Permutacja $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$ ◀ **PRZYKŁAD**
ma jeden cykl długości 1, jeden cykl długości 2 oraz jeden cykl długości 6, a więc jest typu $[1^1 2^1 6^1]$.

■ *Transpozycja* to permutacja typu $[1^{n-2} 2^1]$. Innymi słowy, transpozycja dokonuje tylko jednego przestawienia dwóch elementów.

Dla permutacji $\pi \in S_7$ ◀ **PRZYKŁAD**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

mamy $\pi = (1)(2)(3\ 6)(4)(5)(7) = (3\ 6)$, a więc π jest typu $[1^5 2^1]$, czyli π jest transpozycją.

■ Ponadto zachodzi

$$(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{k-1}\ x_k) = (x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1}) \ldots (x_1\ x_3)(x_1\ x_2).$$

A zatem, jako że na mocy twierdzenia 2.13 dowolna permutacja może być rozłożona na cykle, każda permutacja jest złożeniem transpozycji.

■ Permutacja jest *parzysta*, gdy jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, w przeciwnym wypadku jest *nieparzysta*. *Znak* $\mathrm{sign}(\pi)$ permutacji π to

$$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^r,$$

gdzie r jest liczbą transpozycji, na które można rozłożyć π.

Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_9$ na cykle i transpozycje. ◀ **PRZYKŁAD**
Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest parzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozłóżmy najpierw permutację π na cykle:

- cykl pierwszy: $(1\ 3\ 4\ 5)$;
- cykl drugi: $(2\ 6)$;
- cykl trzeci: $(7\ 9\ 8)$.

A zatem $\pi = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 6)(7\ 9\ 8)$, a tym samym π jest typu $[2^1 3^1 4^1]$. Aby przedstawić teraz π jako złożenie transpozycji, najpierw rozkładamy każdy z cykli, zgodnie ze sposobem podanym wyżej:

- $(1\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)$.
- $(2\ 6)$ — bez zmian.
- $(7\ 9\ 8) = (7\ 8)(7\ 9)$.

A zatem otrzymujemy, że $\pi = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(2\ 6)(7\ 8)(7\ 9)$ i π jest permutacją parzystą.

ZADANIE 2.68. Permutacje $\pi_1, \pi_2 \in S_7$ zadane tabelami:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

rozłóż na cykle i transpozycje. Wyznacz typy tych permutacji.

ZADANIE 2.69. Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_{14}$ na cykle i transpozycje. Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest nieparzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 10 & 8 & 13 & 9 & 11 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Odpowiedzi do zadań

2.1. $\left(\lceil \frac{m}{2} \rceil\right)^n$

2.2. $2k^{n-2}$

2.3. 2^{3n-2}

2.4. Niech n będzie liczbą wierzchołków ścieżki P i niech m $(= n-1)$ oznacza liczbę krawędzi w ścieżce P. Wówczas $8^m = 512$, zatem $m = 3$ — czyli $n = 4$.

2.5. Na zbiorze wierzchołków $V = \{a, b, c\}$ mamy:

- jeden graf o liczbie krawędzi równej 0, zatem 1 możliwość ich skierowania;
- trzy grafy o liczbie krawędzi równej 1, zatem ostatecznie $3 \cdot 2^1$ możliwości ich skierowania;
- trzy grafy o liczbie krawędzi równej 2, zatem ostatecznie $3 \cdot 2^2$ możliwości ich skierowania;
- jeden graf o liczbie krawędzi równej 3, zatem 2^3 możliwości ich skierowania.

Ostatecznie liczba możliwych sieci wynosi $1 + 6 + 12 + 8 = 27$.

2.6. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 4 = \frac{9!}{3!}$

2.7. Niech m będzie liczną krawędzi grafu G. Zachodzi $5 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot ((5-m)+1) = 60$, a zatem $m = 3$. W konsekwencji:

a) 3 lub 4;

b) $1, 2, 3$ lub 4.

2.8.

a) $3! = 6$

b) $4! = 12$

c) $n!$

2.9.

a) $2(n-2)!$

b) $\frac{n!}{2}$

c) $2(n-1)!$

d) $n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$

2.10. $(4!)^2 = 576$

2.11. $\frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{2!3!} = \frac{7!}{8}$

2.12. $\frac{10!}{4!4!2!}$

2.13. Niech x będzie liczbą osób w klasie. Zachodzi $\binom{x}{2} = 300$, stąd $x(x-1) = 600$, a zatem $x = 25$.

2.14.

a) $4 \cdot \binom{6}{5} = 24$

b) $6 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot \binom{4}{3} = 720$

c) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{16}{1} = 19440$

d) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{16}{1} + \binom{6}{1} \cdot \binom{20}{1} = 19560$

2.15. $\left[\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{44}{11}\right] \cdot \left[\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{33}{11}\right] \cdot \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{22}{11}\right] \cdot \left[\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{11}{11}\right] = \frac{(4!)^2 \cdot 44!}{(11!)^4}$.

2.16. Niech P, R oraz B oznaczają odpowiednio zbiory osób, które pływają, jeżdżą na rowerze i biegają. Interesuje nas moc zbioru $X = B \setminus (P \cup R)$. Zauważmy, że

$$|X| = |(B \setminus R)| - |\left((P \cap B) \setminus R\right)|.$$

Z warunków zadania mamy, że $|B \setminus R| = 32$. Ponadto, jako że $|P \cap B \cap R| = 10$ oraz $|P \cap B| = 27$, otrzymujemy, że $|(P \cap B) \setminus R| = 17$. W konsekwencji $|X| = 15$.

2.17. $k(k-1)^3(k-2)^2$

2.18.

a) Problem równoważny jest wybraniu spośród $n-k+1$ miejsc pomiędzy wolnymi $n-k$ krzesłami (rozłącznych) miejsc do wstawienia k krzeseł. Tym samym szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k}$.

b) W rozwiązaniu do pkt. **a)** należy jeszcze uwględnić dowolną permutację pacjentów przy wyborze tych samych krzeseł, a zatem szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k} \cdot k!$.

2.19.

a) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$

b) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$ lub $\binom{60}{3} - \left(\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}\right)$

c) $3 \cdot \binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1}$

2.20. Mając na uwadze, że $\binom{n}{0}\binom{n}{n} = 1$ oraz równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, lewa strona rozważanego równania przyjmuje postać

$$1 - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] - \cdots + (-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + (-1)^n = 0.$$

Zauważmy, że każdy z czynników $\binom{n-1}{k}$, $1 \leq k \leq n-2$, występuje zarówno ze znakiem '+', jak i '$-$', a zatem współczynniki te sumują się nawzajem do 0. Pozostaje $1 - \binom{n-1}{0} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} + (-1)^n = 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n$, co oczywiście sumuje się do 0.

2.21. $\binom{20}{3} \cdot \binom{17}{5} \cdot \binom{12}{7} = \frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 5!}$

2.22. Gdyby drużyny były rozróżnialne, w sensie np. ponumerowane kolejnymi numerami $1, \ldots, n$, wówczas takich wyborów byłoby

$$\binom{3n}{3} \cdot \binom{3n-3}{3} \cdot \binom{3n-6}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{(3n)!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Jednak w naszym przypadku drużyny nie są rozróżnialne, a zatem powyższą liczbę należy podzielić przez liczbę permutacji n drużyn, czyli przez $n!$. A zatem szukana liczba to

$$\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}.$$

2.23. Dla ustalonego $k \geq 0$, kod składa się z k kresek i $n - 2k$ kropek, czyli ma $n - k$ elementów. Zatem aby otrzymać pojedynczy kod, wybieramy k elementów będących kreskami. A zatem wszystkich kodów

Morse'a długości k jest $\binom{n-k}{k}$. W konsekwencji wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n wynosi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$.

2.24. Niech X będzie zbiorem wszystkich niezbalabsowanych ciągów a Y zbiorem ciągów długości $2n$, które mają dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer. Zdefniujmy bijekcję $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}^{2n}$, która dla danego niezbalabsowanego ciągu $(a_1,\ldots,a_{2n})$ przekszałca go w ciąg długości $2n$, który ma dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer, w następujący sposób:

$$f(a_1,\ldots,a_{2n}) = (1-a_1,\ldots,1-a_k,a_{k+1},\ldots,a_{2n}),$$

gdzie k jest najmniejsze takie, że liczba zer w podciągu $(a_1,\ldots,a_k)$ jest mniejsza niż liczba jedynek. Np. dla ciągu niezbalansowanego $(0,1,1,1,0,0)$ mamy $k=3$ oraz $f(0,1,1,1,0,0)=(1,0,0,1,0,0)$. Jako że $|Y| = \binom{2n}{n-1}$, a wszystkich ciągów długości $2n$ z równą liczbą jedynek i zer jest $\binom{2n}{n}$, zatem wszystkich ciągów zbalansowanych długości $2n$ jest $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$.

2.25. Niech m,f,l oznacza odpowiednio liczbę matematyków, filozofów oraz ludożerców. Z warunków zadania otrzymujemy, że $f \geq \frac{l}{2}$, $m \geq \frac{f}{2}$ oraz $l \geq \frac{m}{2}$.

Rozważmy nieróweość $f \geq \frac{l}{2}$. Jako że $m \geq \frac{f}{2}$, a nikt z ludożerców nie zajmuje się jednocześnie filozofią i matematyką, zachodzi $\frac{f}{2} \geq \frac{l}{2}$, a więc $f \geq l$. Podobnie można wykazać, że $m \geq f$ oraz $l \geq m$, co razem implikuje $m=f=l$, a w konsekwencji $m=f=l=100$.

2.26. $\left\{ {7 \atop 2} \right\} = 63$

2.27. $\left\{ {8 \atop 4} \right\} = 1701$

2.28. $\left\{ {8 \atop 5} \right\} \cdot 5! = 1050 \cdot 120 = 126000$

2.29. $B_6 = 203$

2.30. 10

2.31. Zauważmy, że rozbicie n na dodatnie x_i równoważne jest rozdzieleniu n-osobowej kolejki na k niepustych grup, a zatem liczba rozwiazań rozważanego równania wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

2.32. Niech $x_i > 0$, $i=1,\ldots,n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$. A zatem szukana liczba takich rozmieszczeń to $\binom{r-1}{n-1}$.

2.33. Zauważmy, że równanie $x_1+\cdots+x_k=n$, gdzie x_i jest nieujemne, równoważne jest równaniu $(x_1+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k$, gdzie x_i+1 jest dodatnie, czyli równaniu $y_1+\cdots+y_k=n+k$, gdzie y_i jest dodatnie. A liczba rozwiązań takiego równania jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.34. Każdy taki wybór można utożsamić z pewnym rozwiązaniem równania $x_1+\cdots+x_k=n$, gdzie x_i jest nieujemne i określa liczbę przedmiotów typu i. Zatem liczba takich wyborów jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.35. Niech $x_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1+\ldots x_n=r$. A zatem liczba wszystkich takich rozmieszczeń jest równa $\binom{r+n-1}{n-1}$.

2.43. Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że $|C|+|A\cap B\cap C|=4$. Zauważmy, że $|A\cap B\cap C|\leq 1$, ponieważ $|B\cap C=1$. Wtedy $|C|$ jest równe odpowiednio 3 lub 4 (a $|A\cap B\cap C|=0$ lub, odpowiednio, $|A\cap B\cap C|=1$).

2.44. Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczba osób lubiących grać w siatkówkę wynosi 9. Mając teraz na uwadze tylko to, ile osób lubi grać w piłkę nożną i siatkówkę, ile w koszykówkę i siatkówkę, oraz ile we wszystkie trzy gry, znów stosując np. zasadę włączania-wyłączania, otrzymujemy, że 5 osób lubi grać tylko w siatkówkę.

2.45. Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 99\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczb mniejszych od 100 i niepodzielnych przez $2, 3, 5$, ani 7 jest

$$99 - |D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup D_7| = 99 - (49 + 33 + 19 + 14 - 16 - 9 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0) = 22.$$

2.46. Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 2000\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:

- $|D_9| = \lfloor \frac{2000}{9} \rfloor = 222$, $|D_{11}| = \lfloor \frac{2000}{11} \rfloor = 181$, $|D_{13}| = \lfloor \frac{2000}{13} \rfloor = 153$, $|D_{15}| = \lfloor \frac{2000}{15} \rfloor = 133$;
- $|D_9 \cap D_{11}| = |D_{99}| = \lfloor \frac{2000}{99} \rfloor = 20$, $|D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = \lfloor \frac{2000}{117} \rfloor = 17$,
  $|D_9 \cap D_{15}| = |D_{45}| = \lfloor \frac{2000}{45} \rfloor = 44$, $|D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = \lfloor \frac{2000}{143} \rfloor = 13$,
  $|D_{11} \cap D_{15}| = |D_{165}| = \lfloor \frac{2000}{165} \rfloor = 12$, $|D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = \lfloor \frac{2000}{195} \rfloor = 10$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| = |D_{1287}| = \lfloor \frac{2000}{1287} \rfloor = 1$, $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = \lfloor \frac{2000}{495} \rfloor = 4$,
  $|D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{585}| = \lfloor \frac{2000}{585} \rfloor = 3$, $|D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = \lfloor \frac{2000}{2145} \rfloor = 0$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{6435}| = \lfloor \frac{2000}{6435} \rfloor = 0$.

Zauważmy, że $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$, a nie D_{135}, ponieważ najmniejszcza wspólna wielokrotność liczb 9 oraz 15 wynosi 45; podobna ostrożność jest konieczna w przypadku $D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}, D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}$, itd. Wówczas na mocy zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że

$$|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}| = 222 + 181 + 153 + 133 - (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) + (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581.$$

2.55.

$\emptyset$
$\{6\}$
$\{5\}$
$\{5, 6\}$
$\{4\}$
$\{4, 6\}$
$\{4, 5\}$
$\{4, 5, 6\}$
$\{3\}$
$\{3, 6\}$

2.56.

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.57.

$$\begin{array}{l} \{1,2,3\} \\ \{1,2,4\} \\ \{1,3,4\} \\ \{2,3,4\} \\ \{1,2,5\} \\ \{1,3,5\} \\ \{2,3,5\} \\ \{1,4,5\} \\ \{2,4,5\} \\ \{3,4,5\} \end{array}$$

2.58.

$$\begin{array}{l} \{1,2,3,4,5\} \\ \{1,2,3,4,6\} \\ \{1,2,3,5,6\} \\ \{1,2,4,5,6\} \\ \{1,3,4,5,6\} \\ \{2,3,4,5,6\} \\ \{1,2,3,4,7\} \\ \{1,2,3,5,7\} \\ \{1,2,4,5,7\} \\ \{1,3,4,5,7\} \end{array}$$

2.59.

$$\begin{array}{l} \{4,6,1,2,3,5\} \\ \{4,6,1,2,5,3\} \\ \{4,6,1,3,2,5\} \\ \{4,6,1,3,5,2\} \\ \{4,6,1,5,2,3\} \\ \{4,6,1,5,3,2\} \\ \{4,6,2,1,3,5\} \\ \{4,6,2,1,5,3\} \\ \{4,6,2,3,1,5\} \\ \{4,6,2,3,5,1\} \end{array}$$

2.60.

$$\begin{array}{l} \{5,4,6,7,1,2,3\} \\ \{5,4,6,7,1,3,2\} \\ \{5,4,6,7,2,1,3\} \\ \{5,4,6,7,2,3,1\} \\ \{5,4,6,7,3,1,2\} \\ \{5,4,6,7,3,2,1\} \\ \{5,4,7,1,2,3,6\} \\ \{5,4,7,1,2,6,3\} \\ \{5,4,7,1,3,2,6\} \\ \{5,4,7,1,3,6,2\} \end{array}$$

2.61. $!6 = 256$

2.62. $!5 = 44$

2.63.

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ punkty stałe: } 3, 4, 5;$$
$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ punkty stałe: } 3, 4;$$
$$\pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ brak punktów stałych;}$$
$$\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ brak punktów stałych.}$$

2.64. Mając na uwadze definicję złożenia: $\binom{6}{2} + \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{2!} + \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{3!} = 75$. Dzielenie przez 2! oraz 3! wynika z faktu, że nie ma znaczenia kolejność wyboru par tworzących transpozycje. W przypadku wyboru dwóch par, pozostałe dwa punkty, choć tworzą trzecią parę, to są jednak „inną” parą, nie wybraną ani za pierwszym, ani za drugim razem, bo są punktami stałymi.

2.65.

$\pi_1 \circ \pi_2 = (1)(2\ 4\ 5\ 8\ 7)(3\ 6)$; jeden punkt stały: 1;
$\pi_2 \circ \pi_1 = (1\ 6\ 4\ 7\ 8)(2\ 5)(3)$; jeden punkt stały: 3;

$\pi_1^2 = (1\ 3\ 2)(6\ 5\ 4)(7)(8)$; dwa punkty stałe: 7 i 8;

$\pi_1^3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7\ 8)$; sześć punktów stałych: $1, 2, 3, 4, 5$ i 6;

$\pi_2^2 = (1\ 5)(2)(3\ 7)(4)(6)(8)$; cztery punkty stałe: $2, 4, 6$ i 8;

$\pi_2^3 = (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 6)(4)(8)$; dwa punkty stałe: 4 i 8;

$\pi_1^{-1} = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)(8\ 7)$; brak punktów stałych.

2.66. Każdą permutację cykliczną można utożsamić z n-elementowym ciągiem złożonym z n różnych znaków, przy czym dowolne dwa ciągi, które mogą być otrzymane jeden z drugiego poprzez „przesunięcie i zawinięcie” (patrz zadanie z karuzelą) należy utożsamić z jedną i tą samą permutacją cykliczną. W konsekwencji liczna takich permtacji wynosi $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

2.67. 9

2.68.

$\pi_1 = (1\ 3\ 6)(2\ 4\ 5\ 7)$, a tym samym π_1 jest typu $[3^1 4^1]$.
Rozkład na transpozycje: $\pi_1 = (1\ 6)(1\ 3)(2\ 7)(2\ 5)(2\ 4)$.

$\pi_2 = (1\ 4\ 5)(2\ 7)(3)(6)$, a tym samym π_1 jest typu $[1^2 2^1 3^1]$.
Rozkład na transpozycje: $\pi_1 = (1\ 5)(1\ 4)(2\ 7)$.

2.69.

$\pi = (1\ 14\ 6)(2)(3\ 7\ 10\ 9\ 13\ 5\ 4)(8)(11)(12)$, a tym samym π jest typu $[1^4 3^1 7^1]$.
$\pi = (1\ 6)(1\ 14)(3\ 4)(3\ 5)(3\ 13)(3\ 9)(3\ 10)(3\ 7)$, a zatem π jest parzysta.