

INDUKCJA MATEMATYCZNA

oraz REKURENCJA

ZADANIE 8.1. Niech p_n będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na dwa niepuste zbiory. Podaj zależność rekurencyjną dla p_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podziałów (sprawdź rozwiązanie korzystając np. z <https://www.wolframalpha.com>).

ZADANIE 8.2. Niech s_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, wliczając zbiór pusty, które nie zawierają sąsiednich liczb. Znajdź zależność rekurencyjną dla s_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podzbiorów (sprawdź rozwiązanie korzystając np. z <https://www.wolframalpha.com>).

ZADANIE 8.3. Niech X będzie zbiorem k -elementowych ciągów binarnych. Mówimy, że dwa ciągi $c_1, c_2 \in G$ tworzą *parę*, jeśli c_1 oraz c_2 różnią się dokładnie jednym bitem. Uzasadnij za pomocą indukcji matematycznej, że liczba par w zbiorze X wynosi $k2^{k-1}$.

ZADANIE 8.4. Funkcja Ackermanna określona jest następująco ($i, j, k \geq 1$, naturalne):

$$\begin{cases} A(1, j, k) = j + k; \\ A(i + 1, j, 1) = j, \quad i \geq 1; \\ A(i + 1, j, k + 1) = A(i, j, A(i + 1, j, k)), \quad \text{gdy } i, k \geq 1. \end{cases}$$

a) Oblicz $A(2, j, 1)$, $A(2, j, 2)$, $A(2, j, 3)$ oraz $A(3, j, 1)$, $A(3, j, 2)$, $A(3, j, 3)$.

b) Udowodnij, że $A(2, j, k) = j \cdot k$ oraz $A(3, j, k) = j^k$.

c) Oblicz $A(4, 2, 1)$, $A(4, 2, 2)$, $A(4, 2, 3)$. Udowodnij, że $A(4, j, k) = j^{\dots^j} \}^k$.

ZADANIE 8.5. Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite.

```
x := 1;
dopóki (1 < 2) wykonuj
  wypisz(x);
  x := x +  $\sqrt{12(x - 1)}$  + 3;
```

ZADANIE 8.6. Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite.

```
x := 1;
dopóki (1 > 0) wykonuj
  wypisz(x);
  x := 3 + x +  $2\sqrt{3x - 2}$ ;
```

Zadanie 8.7.* W mieście Skrzyżne nie ma ślepych ulic, tzn. jadąc dowolną ulicą w dowolnym kierunku zawsze dojedziemy do skrzyżowania, i wszystkie ulice są dwukierunkowe. Do każdego skrzyżowania dochodzi parzysta liczba ulic. Z każdego skrzyżowania można dojechać do każdego innego skrzyżowania. Udowodnij, że można w tym mieście przejechać wszystkie ulice tak, aby każdą ulicą jechać tylko jeden raz, rozpoczynając i kończąc podróż na tym samym skrzyżowaniu.

Wskazówka. Zastosuj indukcję względem liczby ulic. Skorzystaj z silniejszej wersji zasady indukcji matematycznej (krok indukcyjny: $[P(s) \wedge P(s + 1) \wedge \dots \wedge P(n)] \Rightarrow P(n + 1)$).

Zadanie 8.8.* Poniżej podany jest pseudo-kod algorytmu.

```
const k = ...;
type T = array[1...k] of integers;
for i = 1 to k - 1 do
    for j = 1 to k - i do
        if T[j] < T[j+1] then "zamień T[j] z T[j + 1]"
```

Udowodnij za pomocą indukcji, że powyższy algorytm sortuje tablicę T w porządku nierosnącym.

Wskazówka. Prześledź działanie algorytmu dla małego k , np. dla tablicy $T = [1, 3, 7, 2, 5]$. Co możesz powiedzieć o elemencie $T[j + 1]$ po zakończeniu pętli **for** dla $j = k - 1, k - 2, \dots$? Co możesz powiedzieć o elementach $T[k - i + 1], \dots, T[k]$ po wykonaniu pętli **for** dla $i = 1, 2, \dots$?

Odpowiedzi do zadań

8.1. Rozważmy zbiór $P_n = \{1, 2, \dots, n\}$ i niech p_n oznacza liczbę podziałów zbioru P_n na dwa niepuste zbiory. Po pierwsze, zauważmy, że $p_1 = 0$. Po drugie, zauważmy, że mając podział zbioru P_{n-1} na dwa niepuste podzbiory A i B (nie ma znaczenia kolejność), możemy teraz z nich utworzyć dwa różne podziały zbioru P_n , także na niepuste podzbiory: $P_n = (A \cup \{n\}) \cup B$ lub podział $P_n = A \cup (B \cup \{n\})$. W ten sposób różne podziały (zbiory A i B) zbioru P_{n-1} generują różne podziały zbioru P_n i na odwrót – podział zbioru P_n wyznacza nam (poprzez usunięcie elementu n) jednoznacznie parę A i B tworzącą podział zbioru P_{n-1} , za wyjątkiem podziału P_n postaci $P_{n-1} \cup \{n\}$. W konsekwencji otrzymujemy, że

$$p_n = 2p_{n-1} + 1 \text{ dla } n \geq 2.$$

Następnie, aby odgadnąć wzór, stosujemy metodę iteracyjną:

$$\begin{aligned} p_n &= 2p_{n-1} + 1 \\ &= 2 \cdot (2p_{n-2} + 1) + 1 = 4p_{n-2} + 3 \\ &= 4 \cdot (2p_{n-3} + 1) + 3 = 8p_{n-3} + 7 \\ &= \dots \\ &= 2^{i-1} \cdot (2p_{n-i} + 1) + 2^i - 1 \\ &= \dots \\ &= 2^{n-1} \cdot p_1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze wykazać poprawność tego wzoru.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $p_1 = 0 = 2^{1-1} - 1$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $p_n = 2^{n-1} - 1$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= [\text{wzór}] = 2p_n + 1 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\ &= 2^n - 1, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

8.2. Zauważmy najpierw, że $s_0 = 1$ (jedyne podzbiory to $\emptyset$) oraz $s_1 = 2$ (podzbiory $\emptyset$ oraz $\{1\}$), a np. $s_2 = 3$ (podzbiory $\emptyset, \{1\}$ oraz $\{2\}$) oraz $s_3 = 5$ (podzbiory $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ oraz $\{1, 2\}$). A zatem wydaje się, że możemy zapisać, że $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, z warunkami początkowymi $s_0 = 1$ oraz $s_1 = 2$. Rozwiązanie tej rekurencji pozostawiamy już do samodzielnego wykonania (jest to równanie rekurencyjne liniowe jednorodnego, jego rozwiązanie można sprawdzić np. w oparciu o <https://www.wolframalpha.com>), a skupimy się jedynie na formalnym uzasadnieniu otrzymanego równania rekurencyjnego.

Zauważmy, że na szukane podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ składają się podzbiory, które nie zawierają elementu n oraz te, które go zawierają. Tych, które go nie zawierają, jest s_{n-1} (bierzemy o pożądaną własności podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$), natomiast te, które go zawierają, możemy otrzymać poprzez dodanie elementu n do dowolnego o pożądaną własności podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, n-2\}$ – tych zatem będzie s_{n-2} . Ostatecznie otrzymujemy formułę postaci $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, przy warunkach początkowych $s_0 = 1$ oraz $s_1 = 2$.

8.3. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej. Niech (e_k) będzie ciągiem określającym liczbę par w zbiorze X_k 0/1-ciągów długości k .

1. Krok bazowy: $k = 1$.

Tak, bo wtedy $X_0 = \{0, 1\}$ (0/1-ciągi jednoelementowe), a zatem $e_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$.

2. Założenie indukcyjne: $k \geq 1$.

Dla ustalonego $k \geq 1$, w zbiorze X_k 0/1-ciągów k -elementowych istnieje $k2^{k-1}$ par, czyli $e_k = k2^{k-1}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $k+1$ (≥ 2).

Zauważmy, że zbiór X_{k+1} można podzielić na dwa rozłączne podzbiory $X_{k+1}^0 = \{x0: x \in X_k\}$ oraz $X_{k+1}^1 = \{y1: y \in X_k\}$, takie, że każdy 0/1-ciąg $x0 \in X_{k+1}^0$ tworzy parę z każdym 0/1-ciągiem $x1 \in X_{k+1}^1$. W konsekwencji otrzymujemy, że liczba e_{k+1} par w zbiorze X_{k+1} wyraża się wzorem

$$e_{k+1} = 2e_k + 2^k$$

(bo liczba 0/1-ciągów długości $k+1$ z jednym ustalonym bitem wynosi 2^k). Z założenia indukcyjnego zachodzi $e_k = k2^{k-1}$, a w konsekwencji

$$e_{k+1} = 2e_k + 2^k = 2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = k2^k + 2^k = (k+1)2^k,$$

co należało wykazać.

8.4. N/A

8.5. Na kolejno wypisywane liczby możemy spojrzeć jak na kolejne liczby ciągu (x_n) , który zadany jest następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + \sqrt{12(x_{n-1} - 1)} + 3 \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznamy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 + \sqrt{12 \cdot (1 - 1)} + 3 = 4 \\ x_3 &= 4 + \sqrt{12 \cdot (4 - 1)} + 3 = 4 + \sqrt{36} + 3 = 13 \\ x_4 &= 13 + \sqrt{12 \cdot (13 - 1)} + 3 = 4 + \sqrt{144} + 3 = 19 \\ x_5 &= \dots \end{aligned}$$

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{12(x_n - 1)}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że $\sqrt{12(x_n - 1)}$ jest także liczbą całkowitą. Jako że $\sqrt{12(x_n - 1)} = 2\sqrt{3(x_n - 1)}$, zatem liczba $\sqrt{12(x_n - 1)}$ będzie liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zachodzić $x_n = 3j_n^2 + 1$ dla jakiejś całkowitej liczby j_n (bo wówczas $\sqrt{12(x_n - 1)} = 6j_n$; implikuje to także, że x_n jest liczbą całkowitą) — a zatem dokładnie taką postać ma nasz predykat $P(n)$.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, $x_1 = 3 \cdot 0 + 1$, zatem $j_1 = 0$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi, że $x_n = 3j_n^2 + 1$ dla jakiejś całkowitej liczby j_n .

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [\text{wzór}] = x_n + \sqrt{12(x_n - 1)} + 3 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = (3j_n^2 + 1) + \sqrt{12((3j_n^2 + 1) - 1)} + 3 \\ &= 3j_n^2 + 6j_n + 4 = 3(j_n^2 + 2j_n + 1) + 1 = 3(j_n + 1)^2 + 1 = 3j_{n+1}^2 + 1, \end{aligned}$$

gdzie $j_{n+1} = j_n + 1$ jest liczbą naturalną (bo taką jest j_n), co należało wykazać.

8.6. Na kolejno wypisywane liczby możemy spojrzeć jak na kolejne liczby ciągu (x_n) , który zadany jest następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= 3 + x_{n-1} + 2\sqrt{3x_{n-1} - 2} \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznamy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$x_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 3 + 1 + 2\sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 3 + 1 + 2\sqrt{1} = 6 \\
x_3 &= 3 + 6 + 2\sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 3 + 6 + 2\sqrt{16} = 17 \\
x_4 &= 3 + 17 + 2\sqrt{3 \cdot 17 - 2} = 3 + 17 + \sqrt{49} = 34 \\
x_5 &= \dots
\end{aligned}$$

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{3x_n - 2}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że $\sqrt{3x_n - 2}$ jest także liczbą całkowitą. Liczba $\sqrt{3x_n - 2}$ będzie liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zachodzić

$$x_n = \frac{j_n^2 + 2}{3}$$

dla jakiejś całkowitej liczby j_n (bo wówczas $\sqrt{3x_n - 2} = j_n$; implikuje to także, że x_n jest liczbą całkowitą) — a zatem dokładnie taką postać ma nasz predykat $P(n)$.

Możemy teraz bezpośrednio wykazać indukcyjnie predykat $P(n)$, ale warto bliżej przyjrzeć się kolejnym wyrazom ciągu (x_n) w kontekście wartości j_n . Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 = \frac{1^2 + 2}{3}, \text{ zatem } j_1 = 1 \\
x_2 &= 6 = \frac{4^2 + 2}{3}, \text{ zatem } j_2 = 4 \\
x_3 &= 17 = \frac{7^2 + 2}{3}, \text{ zatem } j_3 = 7 \\
x_4 &= 34 = \frac{10^2 + 2}{3}, \text{ zatem } j_4 = 10 \\
x_5 &= \dots
\end{aligned}$$

W świetle powyższej zależności uzyskanej dla kilku początkowych wyrazów ciągu (x_n) , nasz predykat $P(n)$ zastępujemy następującym predykatem $Q(n)$:

$$x_n = \frac{(3n - 2)^2 + 2}{3}.$$

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, $x_1 = 1 = \frac{(3 \cdot 1 - 2)^2 + 2}{3}$.
2. Założenie indukcyjne: $n \geq 1$.

$$x_n = \frac{(3n - 2)^2 + 2}{3}$$

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= [\text{wzór}] = 3 + x_n + 2\sqrt{3x_n - 2} \\
&= [\text{założenie indukcyjne}] = 3 + \frac{(3n-2)^2 + 2}{3} + 2\sqrt{3 \cdot \frac{(3n-2)^2 + 2}{3} - 2} \\
&= 3 + \frac{(3n-2)^2 + 2}{3} + 2 \cdot (3n - 2) \\
&= \frac{9 + (3n-2)^2 + 2 + 6 \cdot (3n-2)}{3} \\
&= \frac{9 + 9n^2 - 12n + 4 + 2 + 18n - 12}{3} \\
&= \frac{9n^2 + 6n + 3}{3} \\
&= \frac{(3n+1)^2 + 2}{3},
\end{aligned}$$

co należało wykazać.

8.7. N/A

8.8. N/A