

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZADANIE 6.1. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, \dots, 99\}$, które nie są podzielne przez żadną z liczb 2, 3, 5 lub 7?

ZADANIE 6.2. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, \dots, 2000\}$, które są podzielne przez 9, 11, 13 lub 15.

ZADANIE 6.3. Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do trójkąta równobocznego o boku długości 2 cm zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż 1 cm.

Wskazówka. Podziel trójkąt na cztery trójkąty równoboczne o boku długości 1 cm.

ZADANIE 6.4. Niech O będzie kołem o promieniu $r = 1$ cm. Niech $S \subset O$ będzie takim zbiorem punktów należącym do koła, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami z S wynosi przynajmniej 1.1 cm. Uzasadnij, że $|S| \leq 6$.

Wskazówka. Podziel koło na sześć takich samych wycinków.

ZADANIE 6.5. W grupie stu wysportowanych studentów 85 gra w piłkę nożną, 80 – w tenisa, 70 – w siatkówkę, a 66 biega. Czy wśród tych studentów znajduje się taki, który trenuje wszystkie te dyscypliny sportowe?

ZADANIE 6.6. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych będzie istniała para liczb różniących się o wielokrotność n .

Wskazówka. Mając dane liczby $l_0, \dots, l_n$ rozważ n szufladek ponumerowanych $0, 1, \dots, n - 1$. Następnie rozważ każdą z liczb l_i i włóż ją do szufladki odpowiadającej reszcie z dzielenia tej liczby przez n .

ZADANIE 6.7. Ułamek $\frac{m}{k}$, gdzie $m, k \in \mathbb{N}^+$ oraz $m < k$, przedstawiamy w postaci dziesiętnej. Udowodnij, że okres tego ułamka jest nie większy niż k .

Wskazówka. Rozważ algorytm dzielenia m przez k .

ZADANIE 6.8. Mając danych dziesięć dowolnych różnych całkowitych liczb dodatnich mniejszych od 107 pokazać, że będą istniały dwa rozłączne podzbiory tych liczb, których elementy dają taką samą sumę.

Wskazówka. Ile wynosi najmniejsza i największa możliwa suma do uzyskania z dowolnego niepustego podzbioru zbioru dowolnych dziesięciu różnych liczb dodatnich mniejszych od 107? A ile jest podzbiorów dowolnego zbioru 10-elementowego?

Zadanie 6.9.* Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb całkowitych ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$ istnieje taka, która jest wielokrotnością innej.

Wskazówka. Rozważ n szuflad ponumerowanych kolejnymi liczbami nieparzystymi $1, 3, \dots, 2n - 1$. Każdą z wylosowanych liczb wkładamy do szuflady z numerem m , jeżeli $k = 2^r m$ dla jakiegoś $r \geq 0$.

ZADANIE 6.10. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 6.11. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ poczynając od podzbioru $\{1, 2, 3, 5\}$.

ZADANIE 6.12. Wypisz 10 kolejnych 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 6.13. Wypisz 10 kolejnych 5-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

ZADANIE 6.14. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 6\}$ poczynając od permutacji (456321).

ZADANIE 6.15. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ poczynając od permutacji (5463721).

Odpowiedzi do zadań

6.1. Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 99\} : n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczb mniejszych od 100 i niepodzielnych przez 2, 3, 5, ani 7 jest

$$99 - |D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup D_7| = 99 - (49 + 33 + 19 + 14 - 16 - 9 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0) = 22.$$

6.2. Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 2000\} : n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} - |D_9| &= \lfloor \frac{2000}{9} \rfloor = 222, |D_{11}| = \lfloor \frac{2000}{11} \rfloor = 181, |D_{13}| = \lfloor \frac{2000}{13} \rfloor = 153, |D_{15}| = \lfloor \frac{2000}{15} \rfloor = 133; \\ - |D_9 \cap D_{11}| &= |D_{99}| = \lfloor \frac{2000}{99} \rfloor = 20, |D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = \lfloor \frac{2000}{117} \rfloor = 17, \\ |D_9 \cap D_{15}| &= |D_{45}| = \lfloor \frac{2000}{45} \rfloor = 44, |D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = \lfloor \frac{2000}{143} \rfloor = 13, \\ |D_{11} \cap D_{15}| &= |D_{165}| = \lfloor \frac{2000}{165} \rfloor = 12, |D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = \lfloor \frac{2000}{195} \rfloor = 10; \\ - |D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| &= |D_{1287}| = \lfloor \frac{2000}{1287} \rfloor = 1, |D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = \lfloor \frac{2000}{495} \rfloor = 4, \\ |D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| &= |D_{585}| = \lfloor \frac{2000}{585} \rfloor = 3, |D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = \lfloor \frac{2000}{2145} \rfloor = 0; \\ - |D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| &= |D_{6435}| = \lfloor \frac{2000}{6435} \rfloor = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$, a nie D_{135} , ponieważ najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 9 oraz 15 wynosi 45; podobna ostrożność jest konieczna w przypadku $D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}$, $D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}$, itd. Wówczas na mocy zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że

$$|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}| = 222 + 181 + 153 + 133 - (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) + (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581.$$

6.11.

$\emptyset$
 $\{6\}$
 $\{5\}$
 $\{5, 6\}$
 $\{4\}$
 $\{4, 6\}$
 $\{4, 5\}$
 $\{4, 5, 6\}$
 $\{3\}$
 $\{3, 6\}$

6.12.

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
 $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 4\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

6.13.

$\{1, 2, 3\}$
 $\{1, 2, 4\}$
 $\{1, 3, 4\}$
 $\{2, 3, 4\}$
 $\{1, 2, 5\}$
 $\{1, 3, 5\}$
 $\{2, 3, 5\}$
 $\{1, 4, 5\}$
 $\{2, 4, 5\}$
 $\{3, 4, 5\}$

6.14.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$
 $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\{1, 2, 3, 4, 7\}$
 $\{1, 2, 3, 5, 7\}$
 $\{1, 2, 4, 5, 7\}$
 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

6.15.

$\{4, 6, 1, 2, 3, 5\}$
 $\{4, 6, 1, 2, 5, 3\}$
 $\{4, 6, 1, 3, 2, 5\}$
 $\{4, 6, 1, 3, 5, 2\}$
 $\{4, 6, 1, 5, 2, 3\}$
 $\{4, 6, 1, 5, 3, 2\}$
 $\{4, 6, 2, 1, 3, 5\}$
 $\{4, 6, 2, 1, 5, 3\}$
 $\{4, 6, 2, 3, 1, 5\}$
 $\{4, 6, 2, 3, 5, 1\}$

6.16.

$\{5, 4, 6, 7, 1, 2, 3\}$
 $\{5, 4, 6, 7, 1, 3, 2\}$
 $\{5, 4, 6, 7, 2, 1, 3\}$
 $\{5, 4, 6, 7, 2, 3, 1\}$
 $\{5, 4, 6, 7, 3, 1, 2\}$
 $\{5, 4, 6, 7, 3, 2, 1\}$
 $\{5, 4, 7, 1, 2, 3, 6\}$
 $\{5, 4, 7, 1, 2, 6, 3\}$
 $\{5, 4, 7, 1, 3, 2, 6\}$
 $\{5, 4, 7, 1, 3, 6, 2\}$