

# ELEMENTY PRAWDOPODOBIENSTWA

**ZADANIE 13.1.** Zmienna losowa  $X$  posiada następujący rozkład:

|            |               |               |               |                |                |
|------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| $x$        | 1             | 2             | 3             | 4              | 5              |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Oblicz  $P(X \text{ jest parzyste})$ ,  $P(X < 3)$ , wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[X]$ , wariancję  $\text{Var}[X]$  oraz  $P(X \geq \mathbb{E}[X])$ .

**ZADANIE 13.2.** Z urny zawierającej pięć kul z numerami 1, 2, 3, 4, 5 losujemy ze zwracaniem dwie kule. Niech zmienna losowa  $X$  oznacza sumę numerów obu kul. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X$ , jej wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[X]$  oraz wariancję  $\text{Var}[X]$ .

**ZADANIE 13.3.** Z urny zawierającej trzy monety pięciozłotowe i dwie monety dwuzłotowe losujemy dwie monety (bez zwracania). Niech zmienna losowa  $Y$  oznacza sumę nominalów wylosowanych monet. Obliczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej  $Y$ , jej wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[Y]$  oraz wariancję  $\text{Var}[Y]$ .

**ZADANIE 13.4.** Z urny zawierającej dwie monety pięciozłotowe, dwie monety dwuzłotowe i dwie monety jednozłotowe losujemy jedną monetę i jeśli jest to złotówka, to losujemy jeszcze jedną. Niech zmienna losowa  $Z$  oznacza sumę nominalów wylosowanych monet. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej  $Z$ , jej wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[Z]$  oraz wariancję  $\text{Var}[Z]$ .

**ZADANIE 13.5.** Z urny zawierającej cztery białe i trzy czarne kule losujemy bez zwracania dwie kule. Niech zmienna losowa  $X$  oznacza, ile wśród wylosowanych kul jest kul białych. Podaj gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X$ , jej wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[X]$  oraz wariancję  $\text{Var}[X]$ .

**ZADANIE 13.6.** Niech zmienna losowa  $X$  posiada rozkład dwumianowy z długością serii  $n = 2000$  oraz prawdopodobieństwem sukcesu  $p = \frac{1}{2}$ . Oszacuj  $P(X \geq 1500)$  w oparciu o nierówność Markowa i Czebyszewa.

**ZADANIE 13.7.** Oszacuj za pomocą nierówności Markowa i Czebyszewa prawdopodobieństwo tego, że w 400 rzutach uczciwą monetą reszka wypadnie mniej niż 300 razy.

*Wskazówka.* Skorzystaj z własności, że suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

**ZADANIE 13.8.** Zmienna losowa  $X$  posiada następujący rozkład:

|            |                |               |               |               |                |
|------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| $x$        | -2             | -1            | 0             | 1             | 2              |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ |

Oblicz wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}[X]$ , wariancję  $\text{Var}[X]$  oraz  $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1)$ . Porównaj ostatnią liczbę z wartością otrzymaną z nierówności Czebyszewa.

## Odpowiedzi do zadań

**13.1.**

$$P(X \text{ jest parzyste}) = \frac{5}{16}.$$

$$P(X < 3) = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{E}[X] = 1\frac{15}{16}.$$

$$\text{Var}[X] = 5\frac{3}{16} - (1\frac{15}{16})^2 = \frac{367}{256} = 1\frac{111}{256}.$$

$$P(X \geq \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{2}.$$

**13.2.** Zmienna losowa  $X$  posiada następujący rozkład:

|            |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x$        | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{5}{25}$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

Otrzymujemy  $\mathbb{E}[X] = 6$  oraz  $\text{Var}[X] = 4$ .

**13.3.** Zmienna losowa  $Y$  posiada następujący rozkład:

|            |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| $x$        | 4              | 7              | 10             |
| $P(Y = x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

Otrzymujemy  $\mathbb{E}[Y] = 7\frac{3}{5}$  oraz  $\text{Var}[Y] = 2\frac{6}{25}$ .

**13.4.** Zmienna losowa  $Z$  posiada następujący rozkład:

|            |               |                |               |                |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| $z$        | 2             | 3              | 5             | 6              |
| $P(Z = z)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{15}$ |

Otrzymujemy  $\mathbb{E}[Z] = 3\frac{2}{3}$  oraz  $\text{Var}[Z] = 2\frac{22}{45}$ .

**13.5.** Zmienna losowa  $X$  posiada następujący rozkład:

|            |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$        | 0             | 1             | 2             |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |

Otrzymujemy  $\mathbb{E}[X] = 1\frac{1}{7}$  oraz  $\text{Var}[X] = \frac{20}{49}$ .

**13.6.**

- 1) Z nierówności Markowa:  $P(X \geq 1500) \leq \frac{2}{3}$ .
- 2) Z nierówności Czebyszewa:  $P(X \geq 1500) \leq 0.001$ .

**13.7.** Korzystamy z własności, że  $P(X < 300) = 1 - P(X \geq 300)$ .

- 1) Z nierówności Markowa:  $P(X \geq 300) \leq \frac{2}{3}$ .
- 2) Z nierówności Czebyszewa:  $P(X \geq 300) \leq 0.01$ .

W konsekwencji

- 1) Z nierówności Markowa:  $P(X < 300) \geq \frac{1}{3}$ .
- 2) Z nierówności Czebyszewa:  $P(X < 300) \geq 0.99$ .

**13.8.**

$$\mathbb{E}[X] = 0 \text{ oraz } \text{Var}[X] = 1.$$

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Z nierówności Czebyszewa } P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) \leq 1.$$