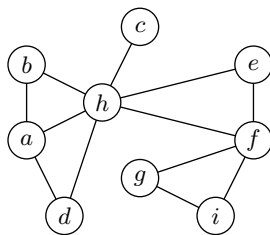


# ELEMENTY TEORII GRAFÓW

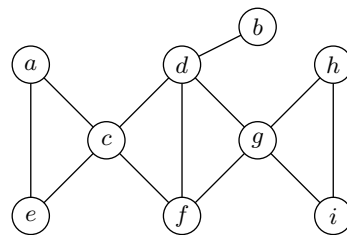
## — ALGORYTMY —

**ZADANIE 11.1.** Skonstruuj (algorytmicznie) dowolne drzewa spinające dla podanych niżej grafów.

a)



b)

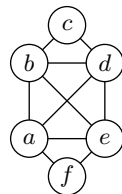


**ZADANIE 11.2.** Zastosuj algorytm przeszukiwania w głąb dla grafów z zadania 12.1 oraz skonstruuj odpowiednie drzewa DFS; jako wierzchołek początkowy przyjmij wierzchołek o etykiecie  $a$ .

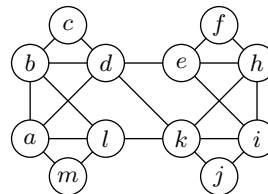
**ZADANIE 11.3.** Zastosuj algorytm przeszukiwania wszerz dla grafów z zadania 12.1 oraz skonstruuj odpowiednie drzewa BFS; jako wierzchołek początkowy przyjmij wierzchołek o etykiecie  $a$ .

**ZADANIE 11.4.** Czy w danych niżej grafach istnieje cykl/łańcuch Eulera? Jeśli tak, wyznacz go.

a)



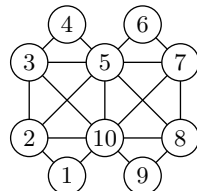
b)



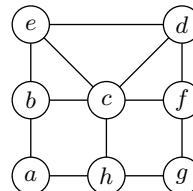
**ZADANIE 11.5.** Wypisz 15 kolejnych kroków działania algorytmu (z nawrotami) znajdowania drogi Hamiltona dla poniższych grafów przy założeniu, że wierzchołkiem początkowym jest:

- a) wierzchołek o etykiecie 5;
- b) wierzchołek o etykiecie  $a$ .

a)



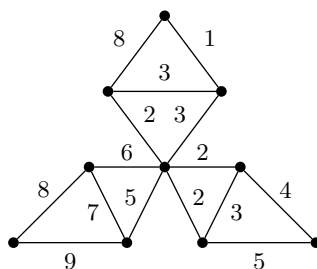
b)



**Zadanie 11.6.\*** Wskaż graf o  $n$  wierzchołkach, dla którego czas działania algorytmu (z nawrotami) znajdowania drogi Hamiltona nie jest wielomianowy.

*Wskazówka.* Aby oszacować z dołu czas działania dla danego grafu, można oszacować tylko np. ile w sumie razy wkładaliśmy jakiegokolwiek z wierzchołków na stos.

**ZADANIE 11.7.** Znajdź minimalne drzewo spinające dla podanego niżej grafu.

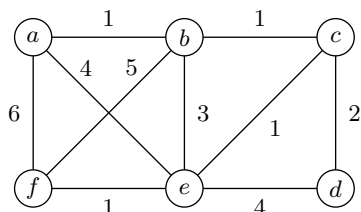


**ZADANIE 11.8.** Poniższa tabela przedstawia odległości pomiędzy 5 miastami A,B,C,D i E. Chcemy tak połączyć miasta, aby z każdego miasta można było dostać się do innego, niekoniecznie drogą bezpośrednią, jednakże chcemy wydać jak najmniej pieniędzy. Jaki jest minimalny koszt budowy takiej sieci dróg, jeżeli 1 km drogi kosztuje 1000000 PLN?

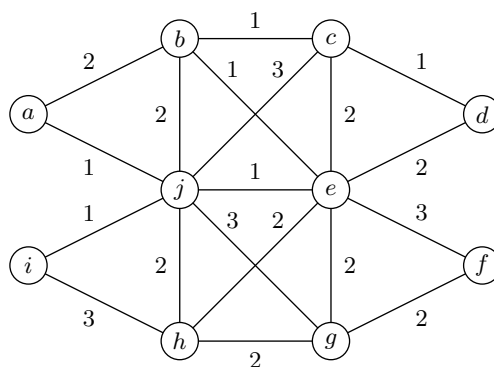
|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | – | 2 | 6 | 3 | 7 |
| B | 2 | – | 6 | 4 | 8 |
| C | 6 | 6 | – | 5 | 8 |
| D | 3 | 4 | 5 | – | 9 |
| E | 7 | 8 | 8 | 9 | – |

**ZADANIE 11.9.** W poniższych grafach znajdź długość najkrótszej drogi z wierzchołka  $a$  do  $f$ , a następnie wyznacz tę drogę.

a)



b)



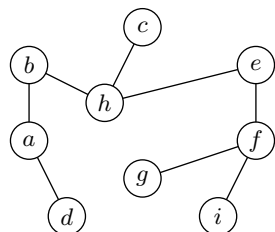
**ZADANIE 11.10.** Prześledź działanie algorytmu rozsyłania wiadomości na hiperkostce  $H_4$ .

**ZADANIE 11.11.** Prześledź działanie algorytmu zbierania wiadomości na hiperkostce  $H_4$ .

## Odpowiedzi do zadań

11.1.

a) Np.:

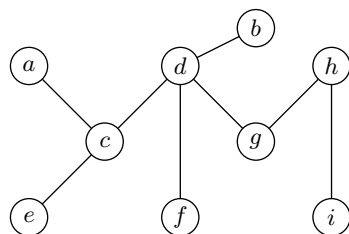


Drzewo spinające  $T = (V, E)$ , gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  oraz

$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}.$

b) Np.:



Drzewo spinające  $T = (V, E)$ , gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  oraz

$E = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}.$

11.2.

a)

|          | STOS                | zbiór krawędzi drzewa DFS                                                            |
|----------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>a</u> | a                   | $\emptyset$                                                                          |
| <u>b</u> | a, b                | $\{\{a, b\}\}$                                                                       |
| <u>h</u> | a, b, h             | $\{\{a, b\}, \{b, h\}\}$                                                             |
| <u>c</u> | a, b, h, c          | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}\}$                                                   |
| <u>d</u> | a, b, h, d          | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}\}$                                         |
| <u>e</u> | a, b, h, e          | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}$                               |
| <u>f</u> | a, b, h, e, f       | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}\}$                     |
| <u>g</u> | a, b, h, e, f, g    | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}$           |
| <u>i</u> | a, b, h, e, f, g, i | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>g</u> | a, b, h, e, f, g    | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>f</u> | a, b, h, e, f       | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>e</u> | a, b, h, e          | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>h</u> | a, b, h             | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>b</u> | a, b                | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| <u>a</u> | a                   | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |
| -        | $\emptyset$         | $\{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}$ |

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności  $a, b, h, c, d, e, f, g, i$  i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS  $T = (V, E')$ , gdzie

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ oraz}$$

$$E' = \{\{a, b\}, \{b, h\}, \{c, h\}, \{d, h\}, \{e, h\}\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, i\}\}.$$

b)

|          | STOS                | zbiór krawędzi drzewa DFS                                                            |
|----------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>a</u> | a                   | $\emptyset$                                                                          |
| <u>c</u> | a, c                | $\{\{a, c\}\}$                                                                       |
| <u>d</u> | a, c, d             | $\{\{a, c\}, \{c, d\}\}$                                                             |
| <u>b</u> | a, c, d, b          | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$                                                   |
| <u>d</u> | a, c, d             | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}\}$                                                   |
| <u>f</u> | a, c, d, f          | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}\}$                                         |
| <u>g</u> | a, c, d, f, g       | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}\}$                               |
| <u>h</u> | a, c, d, f, g, h    | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$                     |
| <u>i</u> | a, c, d, f, g, h, i | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>h</u> | a, c, d, f, g, h    | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>g</u> | a, c, d, f, g       | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>f</u> | a, c, d, f          | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>d</u> | a, c, d             | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>c</u> | a, c                | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}\}$           |
| <u>e</u> | a, c, e             | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$ |
| <u>c</u> | a, c                | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$ |
| <u>a</u> | a                   | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$ |
| —        | $\emptyset$         | $\{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}$ |

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności  $a, c, d, b, f, g, h, i, e$  i otrzymaliśmy drzewo spinające DFS  $T = (V, E')$ , gdzie

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ oraz}$$

$$E' = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}, \{c, e\}\}.$$

### 11.3.

a)

|   | odwiedzane wierz. | KOLEJKA | zbiór krawędzi drzewa BFS                                                            |
|---|-------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| a | a                 | a       | $\emptyset$                                                                          |
| a | b, d, h           | b, d, h | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$                                                   |
| b | —                 | d, h    | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$                                                   |
| d | —                 | h       | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}\}$                                                   |
| h | c, e, f           | c, e, f | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$                     |
| c | —                 | e, f    | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$                     |
| e | —                 | f       | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}\}$                     |
| f | g, i              | g, i    | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$ |
| g | —                 | i       | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$ |
| i | —                 | —       | $\{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}$ |

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności  $a, b, d, h, c, e, f, g, i$  i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS  $T = (V, E')$ , gdzie

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ oraz}$$

$$E' = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, h\}, \{c, h\}, \{e, h\}, \{f, h\}, \{f, g\}, \{f, i\}\}.$$

b)

|     | odwiedzane wierz. | KOLEJKA   | zbiór krawędzi drzewa BFS                                                            |
|-----|-------------------|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$ | $a$               | $a$       | $\emptyset$                                                                          |
| $a$ | $c, e$            | $c, e$    | $\{\{a, c\}, \{a, e\}\}$                                                             |
| $c$ | $d, f$            | $e, d, f$ | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}\}$                                         |
| $e$ | —                 | $d, f$    | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}\}$                                         |
| $d$ | $b, g$            | $f, b, g$ | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$                     |
| $f$ | —                 | $b, g$    | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$                     |
| $b$ | —                 | $g$       | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}\}$                     |
| $g$ | $h, i$            | $h, i$    | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{g, i\}\}$ |
| $h$ | —                 | $i$       | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{g, i\}\}$ |
| $i$ | —                 | —         | $\{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{g, i\}\}$ |

Zatem wierzchołki były odwiedzane w kolejności  $a, c, e, d, f, b, g, h, i$  i otrzymaliśmy drzewo spinające BFS  $T = (V, E')$ , gdzie

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$  oraz

$E' = \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{b, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{g, i\}\}$

#### 11.4.

- a) Wszystkie stopnie w grafie  $G$  są parzyste, zatem w grafie istnieje cykl Eulera. Zaczynamy np. od wierzchołka  $a$ . Kolejno wybierane/trawersowane krawędzie to np.:

$\{a, d\}, \{d, e\}, \{e, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{b, a\}, \{a, f\}, \{f, e\}, \{e, a\}.$

*Uwaga.* Np. po wyborze krawędzi  $\{e, b\}$  nie możemy wybrać krawędzi  $\{a, b\}$ , gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z  $b$ .

- b) W grafie istnieją dwa wierzchołki o nieparzystych stopniach ( $d$  i  $k$ ), zatem w grafie istnieje łańcuch Eulera o początku i końcu w wierzchołkach  $d$  i  $k$ . Zaczynamy np. od wierzchołka  $d$ . Kolejno trawersowane krawędzie to np.:

$\{d, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, b\}, \{b, l\}, \{l, a\}, \{a, m\}, \{m, l\},$

$\{l, k\}, \{k, j\}, \{j, i\}, \{i, k\}, \{k, h\}, \{h, e\}, \{e, f\}, \{f, h\}, \{h, i\}, \{i, e\}, \{e, d\}, \{d, k\}.$

*Uwaga.* Np. po wyborze krawędzi  $\{b, l\}$  nie możemy wybrać krawędzi  $\{l, k\}$ , gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z  $b$ ; analogicznie, po wyborze krawędzi  $\{h, e\}$  nie możemy wybrać krawędzi  $\{d, e\}$ , gdyż jest to most, a są jeszcze inne krawędzie incydentne z  $e$ .

#### 11.5.

- a) Startując z wierzchołka 5:

|     | aktualny wierzchołek | STOS                 |
|-----|----------------------|----------------------|
| 1   | 5                    | 5                    |
| 2   | 2                    | 5, 2                 |
| 3   | 1                    | 5, 2, 1              |
| 4   | 10                   | 5, 2, 1, 10          |
| 5   | 3                    | 5, 2, 1, 10, 3       |
| 6   | 4                    | 5, 2, 1, 10, 3, 4    |
| 7   | 3                    | 5, 2, 1, 10, 3       |
| 8   | 10                   | 5, 2, 1, 10          |
| 9   | 7                    | 5, 2, 1, 10, 7       |
| 10  | 6                    | 5, 2, 1, 10, 7, 6    |
| 11  | 7                    | 5, 2, 1, 10, 7       |
| 12  | 8                    | 5, 2, 1, 10, 7, 8    |
| 13  | 9                    | 5, 2, 1, 10, 7, 8, 9 |
| 14  | 8                    | 5, 2, 1, 10, 7, 8    |
| 15  | 7                    | 5, 2, 1, 10, 7       |
| ... | ...                  | ...                  |

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci 5, 4, 3, 2, 1, 10, 9, 8, 7, 6.

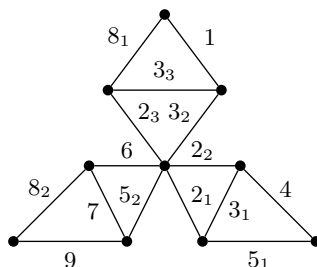
b) Startując z wierzchołka  $a$ :

|     | aktualny wierzchołek | STOS                  |
|-----|----------------------|-----------------------|
| 1   | $a$                  | $a$                   |
| 2   | $b$                  | $a, b$                |
| 3   | $c$                  | $a, b, c$             |
| 4   | $d$                  | $a, b, c, d$          |
| 5   | $e$                  | $a, b, c, d, e$       |
| 6   | $d$                  | $a, b, c, d$          |
| 7   | $f$                  | $a, b, c, d, f$       |
| 8   | $g$                  | $a, b, c, d, f, g$    |
| 9   | $h$                  | $a, b, c, d, f, g, h$ |
| 10  | $g$                  | $a, b, c, d, f, g$    |
| 11  | $f$                  | $a, b, c, d, f$       |
| 12  | $d$                  | $a, b, c, d$          |
| 13  | $c$                  | $a, b, c$             |
| 14  | $e$                  | $a, b, c, e$          |
| 15  | $d$                  | $a, b, c, e, d$       |
| ... | ...                  | ...                   |

Algorytm z nawrotami zwróci drogę Hamiltona postaci  $a, b, c, e, d, f, g, h$ .

**11.6.** Np. graf pełny  $K_{n-1}$ , gdzie wierzchołki mają etykiety  $1, 2, \dots, n-1$ , z dołączonym  $n$ -tym wierzchołkiem o etykiecie  $n$  do wierzchołka o etykiecie 1 oraz 2. Czas działania: musimy na pewno przeglądać wszystkie permutacje zbioru  $\{2, \dots, n-1\}$  zanim algorytm rozpatrzy kolejność  $1, n, \dots$  i chwilę potem znajdzie drogę Hamiltona.

**11.7.**



Posortowany ciąg krawędzi: 1,  $2_1$ ,  $2_2$ ,  $2_3$ ,  $3_1$ ,  $3_2$ ,  $3_3$ , 4,  $5_1$ ,  $5_2$ , 6, 7,  $8_1$ ,  $8_2$ , 9.

Dla ułatwienia ilustracji działania algorytmu utożsamiamy wagi krawędzi z samymi krawędziami. Przebieg algorytmu jest następujący.

| rozpatrywana krawędź | cykl? | krawędzie drzewa                                   |
|----------------------|-------|----------------------------------------------------|
| 1                    | –     | 1                                                  |
| $2_1$                | –     | 1, $2_1$                                           |
| $2_2$                | –     | 1, $2_1$ , $2_2$                                   |
| $2_3$                | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$                           |
| $3_1$                | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$                           |
| $3_2$                | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$                   |
| $3_3$                | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$                   |
| 4                    | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4               |
| $5_1$                | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4               |
| $5_2$                | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$        |
| 6                    | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$ , 6    |
| 7                    | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$ , 6    |
| $8_1$                | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$ , 6    |
| $8_2$                | –     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$ , 6, 8 |
| 9                    | +     | 1, $2_1$ , $2_2$ , $2_3$ , $3_2$ , 4, $5_2$ , 6, 8 |

**11.8.** Zauważmy, że rozwiązanie problemu równoważne jest minimalnemu drzewu spinającemu w ważonym grafie pełnym  $G = (V, E, w)$ , w którym wierzchołki odpowiadają miastom, a wagi krawędzi odległościom pomiędzy tymi miastami. Aby wyznaczyć to drzewo korzystamy z algorytmu Kruskala — koszt otrzymanego rozwiązania/drzewa wynosi 17000000 PLN.

**11.9.**

a)

| Iteracja | $u$ | $\bar{V}$           | $D[a]$ | $D[b]$   | $D[c]$   | $D[d]$   | $D[e]$   | $D[f]$   |
|----------|-----|---------------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0        |     | $\{b, c, d, e, f\}$ | 0      | <u>1</u> | $\infty$ | $\infty$ | 4        | 6        |
| 1        | $b$ | $\{c, d, e, f\}$    | 0      | 1        | <u>2</u> | $\infty$ | 4        | 6        |
| 2        | $c$ | $\{d, e, f\}$       | 0      | 1        | 2        | 4        | <u>3</u> | 6        |
| 3        | $e$ | $\{d, f\}$          | 0      | 1        | 2        | <u>4</u> | 3        | 4        |
| 4        | $d$ | $\{f\}$             | 0      | 1        | 2        | 4        | 3        | <u>4</u> |
| 5        | $f$ | $\emptyset$         | 0      | 1        | 2        | 4        | 3        | 4        |

A zatem najkrótsza ścieżka z  $a$  do  $f$  ma długość  $D[f] = 4$ . Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 4 &= D[f] = D[e] + 1 = (D[c] + 1) + 1 = ((D[b] + 1) + 1) + 1 = \\ &= (((D[a] + 1) + 1) + 1) + 1 = (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 4. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki  $a, b, c, e, f$ .

b)

|   | $u$ | $\bar{V}$                       | $D[a]$ | $D[b]$   | $D[c]$   | $D[d]$   | $D[e]$   | $D[f]$   | $D[g]$   | $D[h]$   | $D[i]$   | $D[j]$   |
|---|-----|---------------------------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 |     | $\{b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ | 0      | 2        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | <u>1</u> |
| 1 | $j$ | $\{b, c, d, e, f, g, h, i\}$    | 0      | <u>2</u> | 4        | $\infty$ | 2        | $\infty$ | 4        | 3        | 2        | 1        |
| 2 | $b$ | $\{c, d, e, f, g, h, i\}$       | 0      | 2        | 3        | $\infty$ | <u>2</u> | $\infty$ | 4        | 3        | 2        | 1        |
| 3 | $e$ | $\{c, d, f, g, h, i\}$          | 0      | 2        | 3        | 4        | 2        | 5        | 4        | 3        | <u>2</u> | 1        |
| 4 | $i$ | $\{c, d, f, g, h\}$             | 0      | 2        | <u>3</u> | 4        | 2        | 5        | 4        | 3        | 2        | 1        |
| 5 | $c$ | $\{d, f, g, h\}$                | 0      | 2        | 3        | 4        | 2        | 5        | 4        | <u>3</u> | 2        | 1        |
| 6 | $h$ | $\{d, f, g\}$                   | 0      | 2        | 3        | 4        | 2        | 5        | 4        | <u>3</u> | 2        | 1        |
| 7 | $d$ | $\{f, g\}$                      | 0      | 2        | 3        | <u>4</u> | 2        | 5        | 4        | 3        | 2        | 1        |
| 8 | $g$ | $\{f\}$                         | 0      | 2        | 3        | <u>4</u> | 2        | 5        | 4        | 3        | 2        | 1        |
| 9 | $f$ | $\emptyset$                     | 0      | 2        | 3        | 4        | 2        | <u>5</u> | 4        | 3        | 2        | 1        |

A zatem najkrótsza ścieżka z  $a$  do  $f$  ma długość  $D[f] = 5$ . Wyznaczenie tej ścieżki:

$$\begin{aligned} 5 &= D[f] = D[e] + 3 = (D[j] + 1) + 3 = ((D[a] + 1) + 1) + 3 = \\ &= (((0 + 1) + 1) + 1) + 1 = 5. \end{aligned}$$

Tym samym ścieżka ta wiedzie przez wierzchołki  $a, j, e, f$ .

**11.10.**

1. 0000  $\rightarrow$  0001
2. 0000  $\rightarrow$  0010  
0001  $\rightarrow$  0011
3. 0000  $\rightarrow$  0100  
0001  $\rightarrow$  0101  
0010  $\rightarrow$  0110  
0011  $\rightarrow$  0111

4. 0000  $\longrightarrow$  1000  
0001  $\longrightarrow$  1001  
0010  $\longrightarrow$  1010  
0011  $\longrightarrow$  1011  
0100  $\longrightarrow$  1100  
0101  $\longrightarrow$  1101  
0110  $\longrightarrow$  1110  
0111  $\longrightarrow$  1111

**11.11.**

1. 1000  $\longrightarrow$  0000  
1001  $\longrightarrow$  0001  
1010  $\longrightarrow$  0010  
1011  $\longrightarrow$  0011  
1100  $\longrightarrow$  0100  
1101  $\longrightarrow$  0101  
1110  $\longrightarrow$  0110  
1111  $\longrightarrow$  0111
2. 0100  $\longrightarrow$  0000  
0101  $\longrightarrow$  0001  
0110  $\longrightarrow$  0010  
0111  $\longrightarrow$  0011
3. 0010  $\longrightarrow$  0000  
0011  $\longrightarrow$  0001
4. 0001  $\longrightarrow$  0000