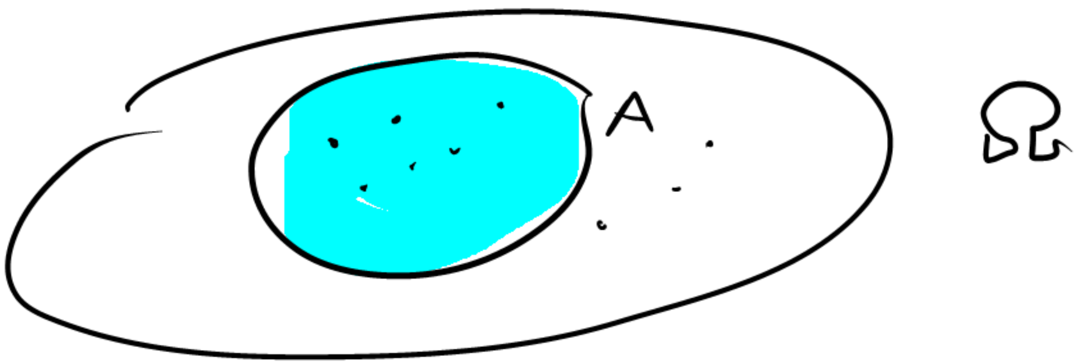
# ELEMENTY PRAWDOPODOBIEŃSTWA

**TWIERDZENIE 5.1** (Prawopodobieństwo klasyczne)
*Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, natomiast $A$ jest dowolnym zdarzeniem w tej przestrzeni, wówczas*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

*gdzie $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia $A$.*



Dokonujemy trzech rzutów monetą. Każde zdarzenie elementarne (trójka) jest jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$ polegającego na tym, że orzeł pojawi się dwa razy? Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $B$ polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najmniej dwa razy? Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $C$ polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najwyżej dwa razy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zbiór zdarzeń elementarnych jest następujący:

$$\{\mathrm{OOO}, \mathrm{OOR}, \mathrm{ORO}, \mathrm{ROO}, \mathrm{RRR}, \mathrm{ORR}, \mathrm{ROR}, \mathrm{RRO}\}.$$

$|\Omega| = 8$

Mając teraz na uwadze liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjającą każdemu ze zdarzeń, otrzymujemy $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ oraz $P(C) = \frac{7}{8}$.

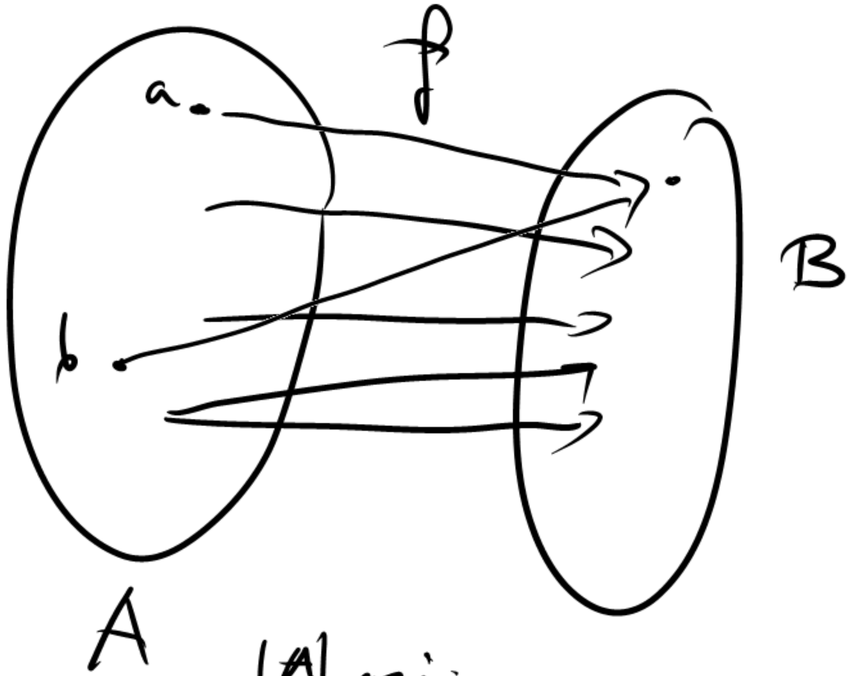
$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad :)$$

zdarzenie przeciwne do zdarzenia C

$\bar{C} = \{OOO\}$ $\quad P(\bar{C}) = \frac{1}{8}$

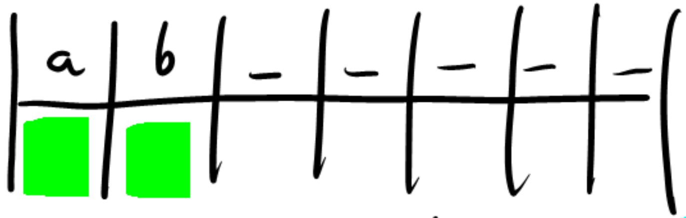
Rozważmy zbiór wszystkich funkcji ze zbioru $A$ w zbiór $B$, gdzie $|A| \geq 2$ (czyli $\Omega = B^A$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana funkcja posiada takie same wartości dla dwóch z góry wybranych elementów $a, b \in A$? ◀ **PRZYKŁAD**

Liczba wszystkich funkcji wynosi $|B|^{|A|}$, natomiast liczba funkcji spełniających określone warunki ($a$ i $b$ są ustalone z góry) to $|B|^{|A|-1}$. A zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $1/|B|$.



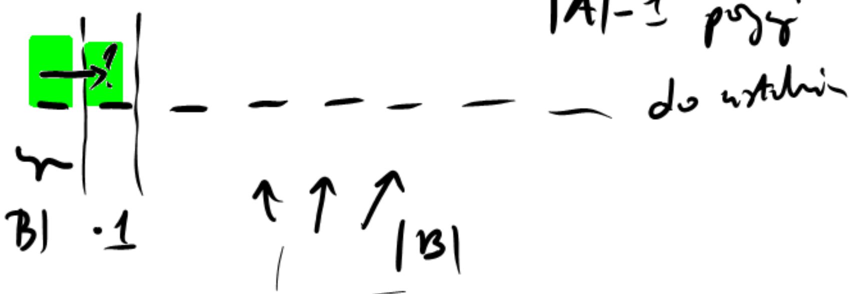


$|\Omega| = |B|^{|A|}$



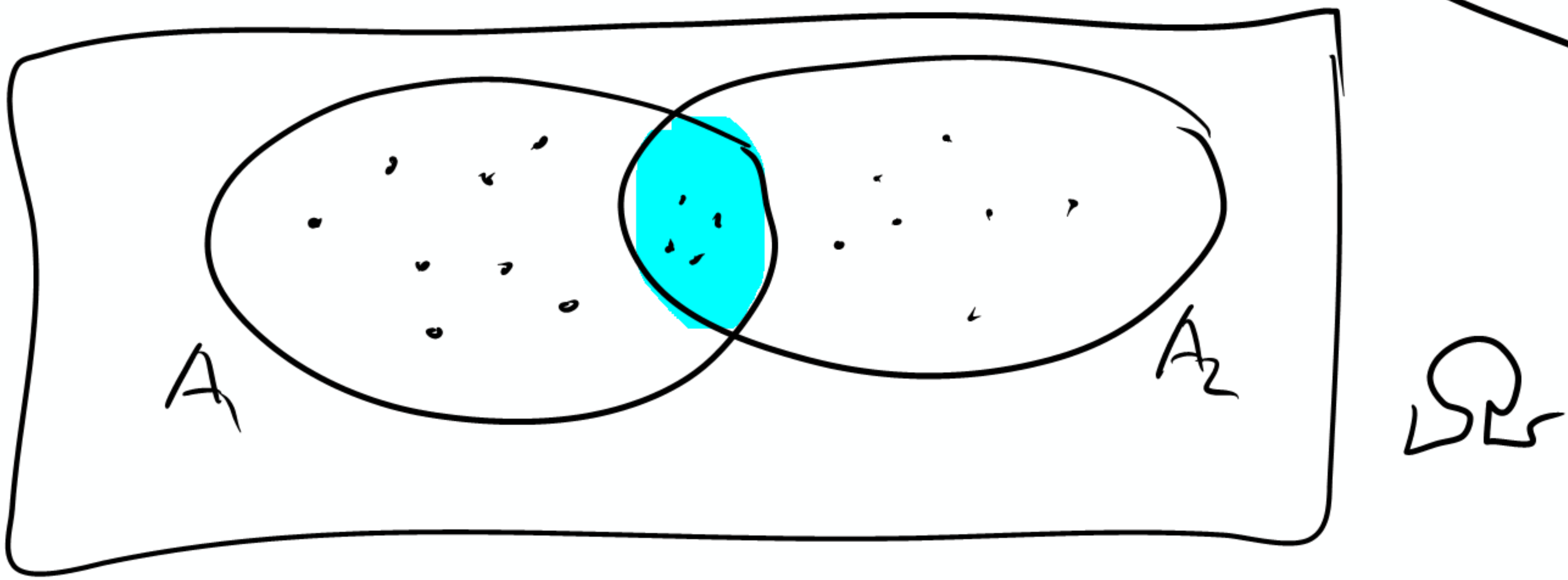

takich funkcji $|B|^{|A|-1}$

$f(a) = f(b)$



**Twierdzenie 5.2** (Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń)
*Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń $A_1$ lub $A_2$ równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo łącznego ich zajścia, tzn.*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$




$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = \, ? = \frac{|A_1 \cup A_2|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} =$$

Twierdzenie 5.2 (Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń)
*Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń $A_1$ lub $A_2$ równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo łącznego ich zajścia, tzn.*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losując jedną kartę z talii 52 kart otrzymamy pika lub asa. ◄ **PRZYKŁAD**

Oznaczmy przez $A_1$ zdarzenie polegające na otrzymaniu pika, przez $A_2$ zdarzenie polegające na otrzymaniu asa, a przez $A$ zdarzenie polegające na zajściu przynajmniej jednego z wyżej wymienionych zdarzeń. Zauważmy, że zdarzenie $A_1 \cap A_2$ polega na otrzymaniu asa pik. Tym samym ze wzoru otrzymujemy

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

**TWIERDZENIE 5.2** (Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń)
*Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń $A_1$ lub $A_2$ równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo łącznego ich zajścia, tzn.*

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

 $\times 6$

$\Omega = 6^6$

dowolne

2,4,6 dowolne

$|A_1| = 3 \cdot 6^5$

2,4,6 dowolne

$|A_2| = 3 \cdot 6^5$

$A_1$ – na pierwszej pozycji wypadła liczba parzysta

$A_2$ – na drugiej pozycji wypadła liczba parzysta

$|A_1 \cap A_2| = 3^2 \cdot 6^4$

dowolne

2,4,6

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$$

Rzucamy sześć razy symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym lub drugim razem wypadnie liczba parzysta? ◀ **PRZYKŁAD**

$$= \frac{3 \cdot 6^5}{6^6} + \frac{3 \cdot 6^5}{6^6} - \frac{3^2 \cdot 6^4}{6^6} = \frac{6^4(18+18-9)}{6^6} = \frac{27 \cdot 6^4}{6^6}$$

## SCHEMAT BERNOULLIEGO

**TWIERDZENIE 5.3** (Schemat Bernoulliego)
*Prawdopodobieństwo tego, że na $n$ przeprowadzonych doświadczeń według schematu Bernoulliego uzyska się $k$ sukcesów w dowolnej kolejności, wyraża się wzorem*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

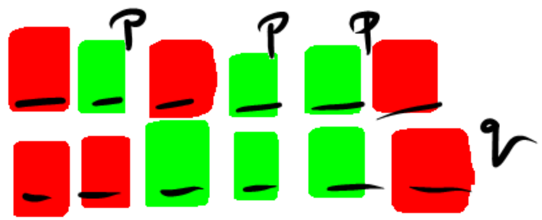
gdzie $0 < p \leq 1$ i $q = 1 - p$.

Rzucamy kostką do gry. Sukces: wypadnie $\boxed{5}$. Prawdopodobieństwo sukcesu: $\frac{1}{6}$.

Prawdopodobieństwo porażki: $\frac{5}{6}$

Rzucamy 6 razy. Interesuje nas $k$ sukcesów?

$(n=6)$ np. 3 razy wypadnie $\boxed{5}$,




....

3 sukcesy, bez znaczenia pozycji

$$\binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot q^{6-3}$$

## SCHEMAT BERNOULLIEGO

**TWIERDZENIE 5.3** (Schemat Bernoulliego)
*Prawdopodobieństwo tego, że na $n$ przeprowadzonych doświadczeń według schematu Bernoulliego uzyska się $k$ sukcesów w dowolnej kolejności, wyraża się wzorem*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

gdzie $0 < p \leq 1$ i $q = 1 - p$.

Pojedynczy rzut: P: liczba oczek parzysta $(2,4,6)$ - sukces
N: liczba oczek nieparzysta $(1,3,5)$ - porażka

$p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

N N N N N N same porażki :-)

P P P P P P same sukcesy

P N N N N P

Odp: $P_{6,0} + P_{6,2} + P_{6,4} + P_{6,6}$

$$= \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii sześciu rzutów symetryczną kostką do gry suma oczek będzie parzysta? ◀ **PRZYKŁAD**

$$= \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \ldots$$

$$= (1+15+15+1)\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{2^5}{2^6} = \frac{1}{2}$$

np. 2 3 3 1 5 4 $\Sigma = 18$

# PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE ORAZ NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

*Prawdopodobieństwem warunkowym* $P(A|B)$ zdarzenia $A$ przy założeniu, że zaszło zdarzenie $B$, nazywamy iloraz prawdopodobieństwa łącznego zajścia zdarzeń $A$ i $B$ do prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia $B$:

① $P(D|\blacksquare) = \dfrac{P(D \cap \blacksquare)}{P(\blacksquare)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ gdzie } P(B) > 0.$$

Mówimy, że zdarzenie $A$ jest *niezależne* od zdarzenia $B$, jeśli zachodzi jeden z dwóch przypadków:

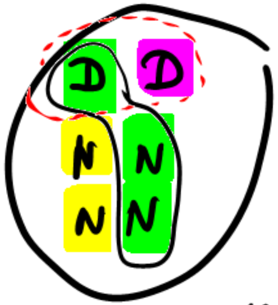
$$P(A|B) = P(A) \text{ i } P(B) > 0 \text{ albo } P(B) = 0.$$

**TWIERDZENIE 5.4** (Niezależność zdarzeń)
*Aby zdarzenia $A$ i $B$ były niezależne, potrzeba i wystarcza, aby* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

①

$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

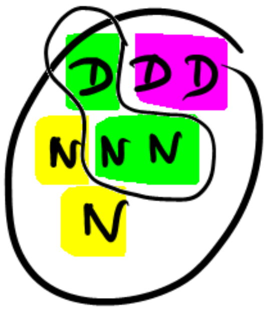
$P(D|\blacksquare) = \frac{1}{3}$




$P(\blacksquare) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\blacksquare|D) = \frac{1}{2}$

& niezależne




$P(D) = \frac{3}{7}$

$P(D|\blacksquare) = \frac{1}{3}$

& zależne

W urnie są kule o numerach $1, 2, 3, 4, 5$. Wybieramy losowo dwie kule bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzeń takich, że otrzymamy: ◀ **PRZYKŁAD**

a) kule o kolejnych rosnących numerach.

b) kule o kolejnych rosnących numerach, jeżeli wylosowano m.in. kulę o numerze 2.

Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu kul o rosnących numerach, a $B$ zdarzenie polegające na wylosowaniu (jakiejś) kuli o numerze 2. Wówczas

$$\Omega = \{(x, y) : x \neq y \text{ oraz } x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

czyli $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$, a następnie:

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\},$$

$$B = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$$

oraz $A \cap B = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = P(A) \cdot P(B)$$

A zatem $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, a zatem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Jako że $P(A|B) = P(A)$ i $P(B) > 0$, otrzymujemy, że zdarzenia $A$ i $B$ są niezależne (także z faktu, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (twierdzenie 5.3)).

**TWIERDZENIE 5.5** (Twierdzenie Bayesa /podstawowa postać/)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

◀ **PRZYKŁAD**

Niech $B$ będzie zdarzeniem „u ucznia występuje wysoka gorączka”, a $A$ będzie zdarzeniem „uczeń ma grypę”. Załóżmy, że w jakiejś szkole w grupie uczniów klasy IA prawdopodobieństwo wystąpienia gorączki wynosi $P(B) = 0,2$, a prawdopodobieństwo wystąpienia grypy wynosi $P(A) = 0,1$. Załóżmy także, prawdopodobieństwo $P(B|A)$ tego, że chory uczeń gorączkuje wynosi $0,7$. Ile wynosi prawdopodobienstwo $P(A|B)$ tego, że uczeń gorączkujący choruje?

**TWIERDZENIE 5.5** (Twierdzenie Bayesa /podstawowa postać/)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

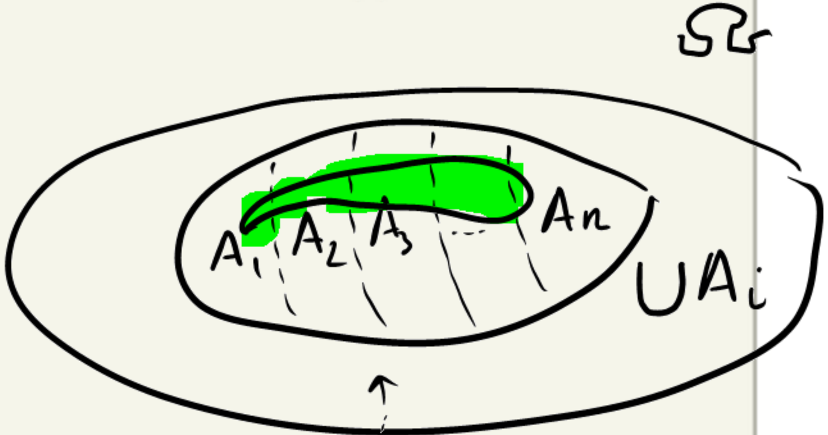
◀ **PRZYKŁAD**

Niech $B$ będzie zdarzeniem „u ucznia występuje wysoka gorączka”, a $A$ będzie zdarzeniem „uczeń ma grypę”. Załóżmy, że w jakiejś szkole w grupie uczniów klasy IA prawdopodobieństwo wystąpienia gorączki wynosi $P(B) = 0,2$, a prawdopodobieństwo wystąpienia grypy wynosi $P(A) = 0,1$. Załóżmy także, prawdopodobieństwo $P(B|A)$ tego, że chory uczeń gorączkuje wynosi $0,7$. Ile wynosi prawdopodobienstwo $P(A|B)$ tego, że uczeń gorączkujący choruje?

Na mocy twierdzenia Bayesa otrzymujemy:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,1}{0,2} = 0,35.$$

**Twierdzenie 5.6** (Twierdzenie Bayesa /wersja dla wielu zdarzeń/)
*Niech $B, A_1, \ldots, A_n$ będą takimi zdarzeniami, że:*




- $P(B) > 0$,
- $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $i, j \in [n]$.

*Wówczas dla dowolnego $k \in [n]$ zachodzi:*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

$$P(A_k|B) \overset{(**)}{=} \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum P(B \cap A_k)} \overset{(*)}{=} \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum P(B|A_k) \cdot P(A_k)}$$

- $B = B \cap \bigcup A_i = \bigcup (B \cap A_i)$

$$P(B) = P\Big(\bigcup \underbrace{(B \cap A_i)}_{\text{rozłączne } i \neq j}\Big) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_k)$$

(*) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$\{A = B,\ B = A_k\}$

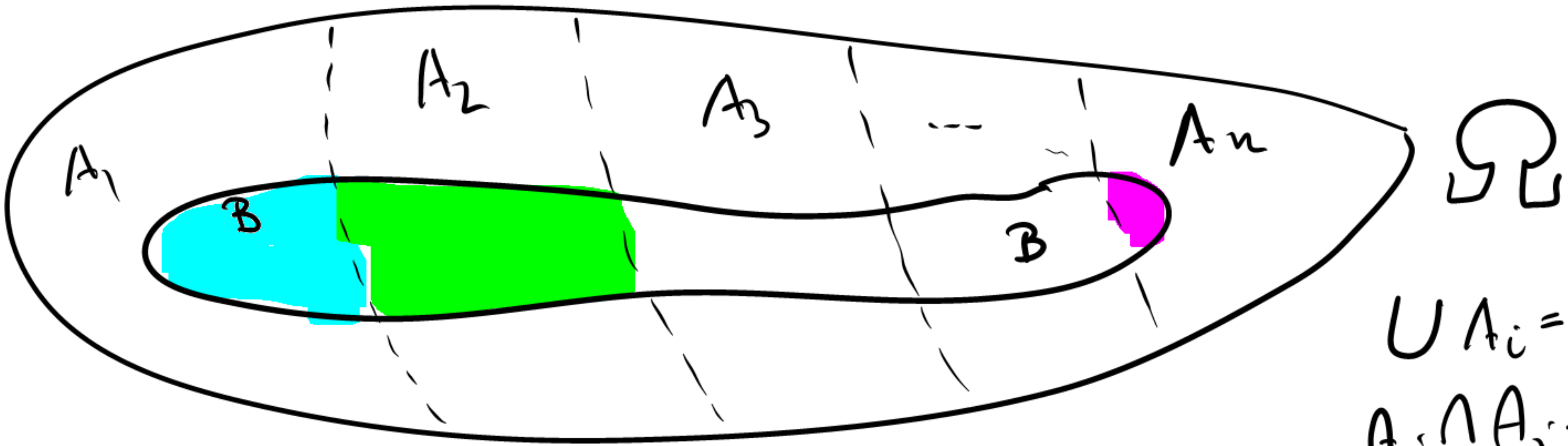
$$P(B \cap A_k) = P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

(**) $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

# UKŁAD ZUPEŁNY ZDARZEŃ ORAZ PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

TWIERDZENIE 5.7 (Prawdopodobieństwie zupełne)
*Jeśli zdarzenia $A_1, \cdots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $B$ wyliczamy ze wzoru*

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

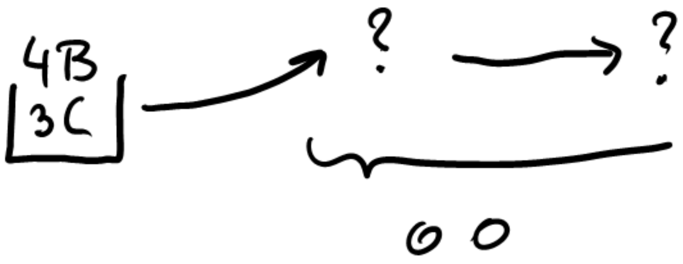


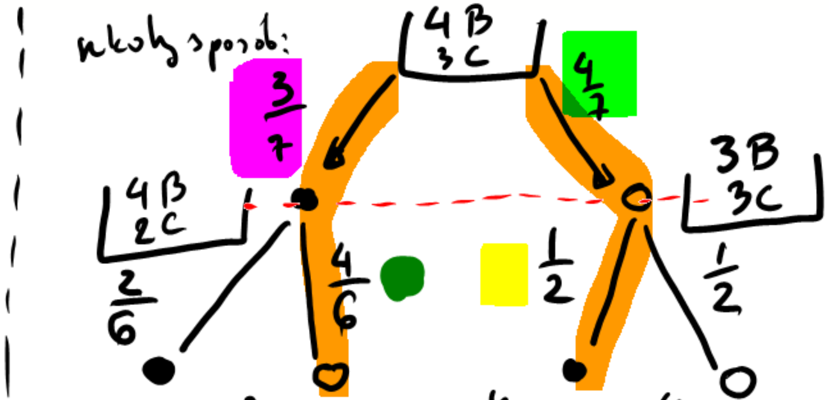

$$\bigcup A_i = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

**TWIERDZENIE 5.7** (Prawdopodobieństwie zupełne)
*Jeśli zdarzenia $A_1, \cdots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $B$ wyliczamy ze wzoru*

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$





$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{7}$$

W urnie są 4 kule białe i 3 czarne. Losujemy dwie kule. ◀ **PRZYKŁAD**
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kul w różnych kolorach?

Niech $B$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za pierwszym razem kuli białej, a $C$ – wylosowaniu kuli czarnej. Niech $R$ oznacza wylosowanie za drugim razem kuli różnej od tej za pierwszym razem. Wówczas z twierdzenia 4.3 otrzymujemy, że

$$P(R) = P(B) \cdot P(R|B) + P(C) \cdot P(R|C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7}.$$

## UKŁAD ZUPEŁNY ZDARZEŃ ORAZ PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

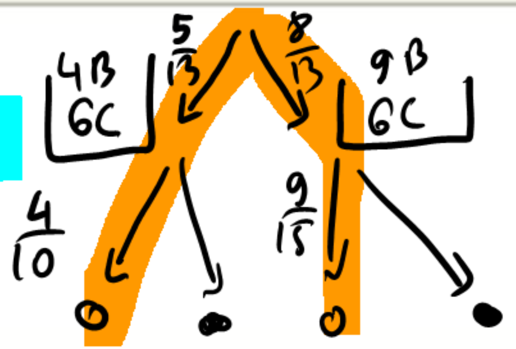
**TWIERDZENIE 5.7** (Prawdopodobieństwie zupełne)
*Jeśli zdarzenia $A_1, \cdots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $B$ wyliczamy ze wzoru*

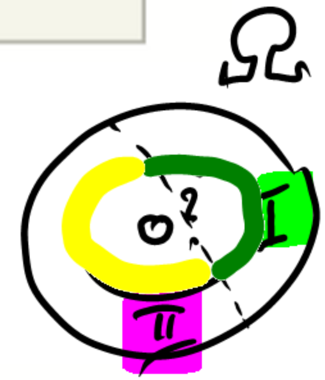
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

I 4B 6C ×5

II 9B 6C ×8

wylosowanie urny → losowanie kuli




W każdej z 5 urn pierwszej serii znajdują się 4 kule białe oraz 6 kul czarnych, natomiast w każdej z 8 urn drugiej serii znajduje się 9 kul białych i 6 kul czarnych. Sięgamy losowo do jednej z urn i i wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana kula będzie biała? ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wybraniu urny typu pierwszego, a $B$ – wybraniu urny typu drugiego. Niech $C$ oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

!

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{5} + \frac{8}{13} \cdot \frac{9}{15} = \frac{34}{65}.$$