Matematyka dyskretna

Andrzej Szepietowski

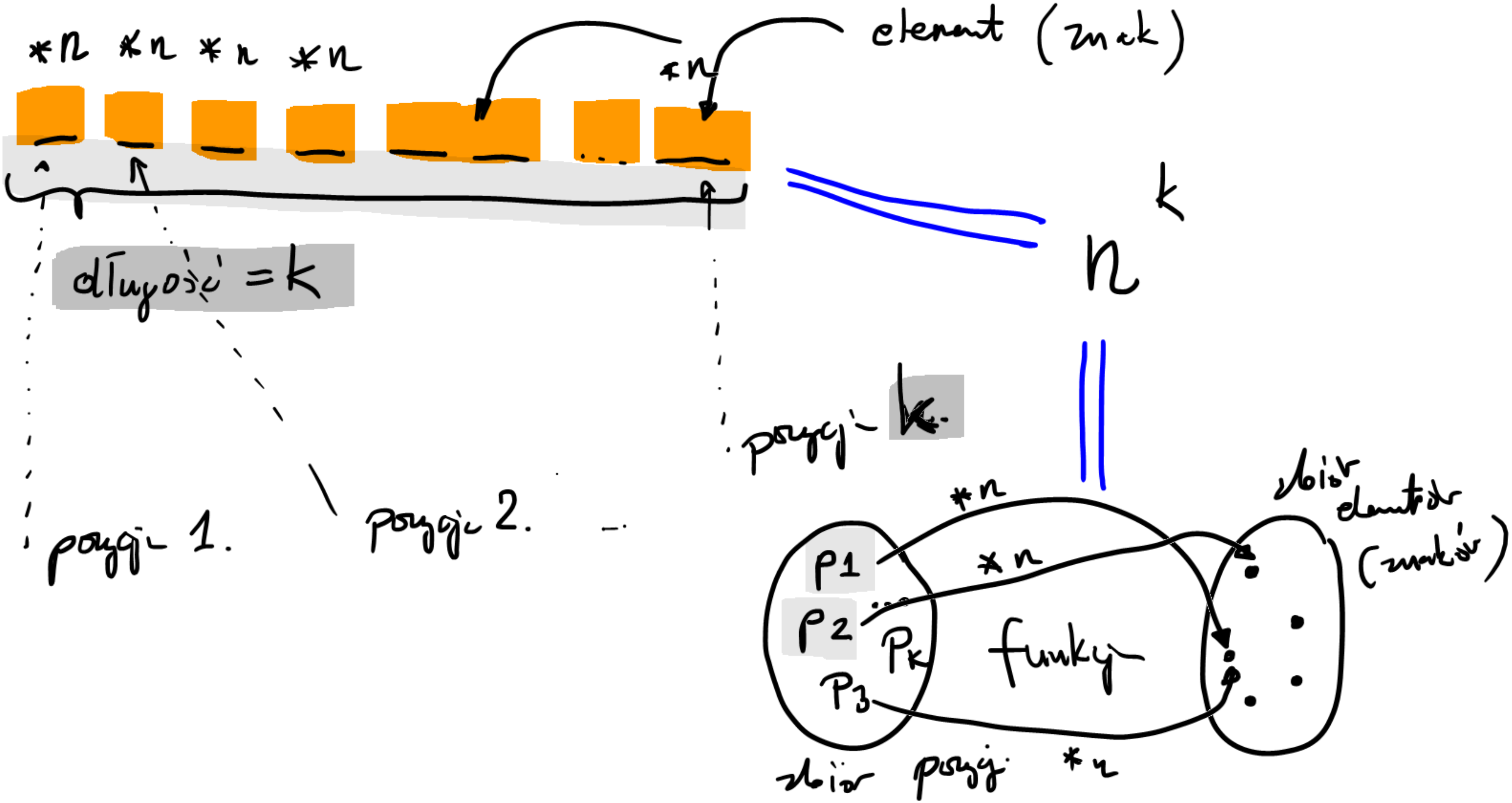
Jest to kolejne, poprawione, wydanie. Głównym celem przedstawionego wykładu jest przygotowanie do dalszego studiowania informatyki, a w szczególności do nauki projektowania algorytmów. Podręcznik zawiera podstawowe wiadomości z tzw. matematyki dyskretnej, czyli z arytmetyki, kombinatoryki, funkcji logicznych i teorii liczb. Zawiera także wiele przykładów algorytmów oraz zadania algorytmiczne do samodzielnego rozwiązania.

ELEMENTY KOMBINATORYKI

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 1.1 (Wariacje z powtórzeniami)

- *Liczba ciągów długości k ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.*
- *Liczba funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi n^k.*



WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 1.1 (Wariacje z powtórzeniami)

- *Liczba ciągów długości k ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.*
- *Liczba funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi n^k.*

◀ PRZYKŁAD

Ile jest 7-cyfrowych palindromicznych (tzn. które czytane od lewej do prawej są takie same, jak czytane od prawej do lewej) liczb naturalnych?

np. 1234321 TAK

9833389 TAK

0833380 NIE

1234567 NIE

1234321

palindrom

1234321

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$f(x)$							

$\{p_1, p_2, \ldots, p_7\} \xrightarrow{f} \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

$f(p_1) = f(p_7) \neq 0$

$f(p_2) = f(p_6)$

$f(p_3) = f(p_5)$

$f(4)$ dowolne

$\boxed{9 \cdot 10^3}$

9 10 10 10 ? ? ?

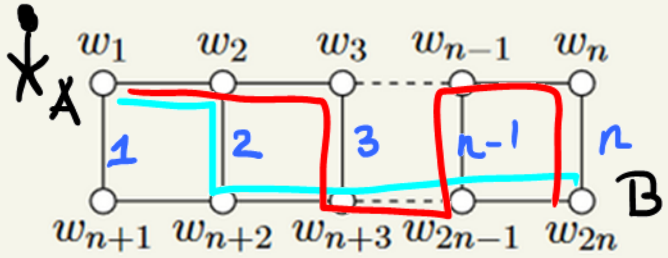
WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 1.1 (Wariacje z powtórzeniami)

- *Liczba ciągów długości k ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.*
- *Liczba funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi n^k.*

◀ PRZYKŁAD

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 w kracie $L(2, n)$, a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę?



krata $L(2, n)$

$$A \xrightarrow{\text{tam}} B \xrightarrow{\text{z powrotem}} A$$

2 OK

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$

:-(

Odp: n^2

$k=2$

$f : \{\text{tam}, \text{z powrotem}\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

_ _ _ _ _ _ _ ciąg

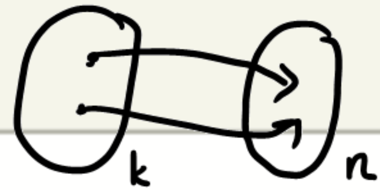
TWIERDZENIE 1.2 (Wariacje bez powtórzeń)

- *Liczba ciągów bez powtórzeń długości k ze zbioru n-elementowego wynosi*

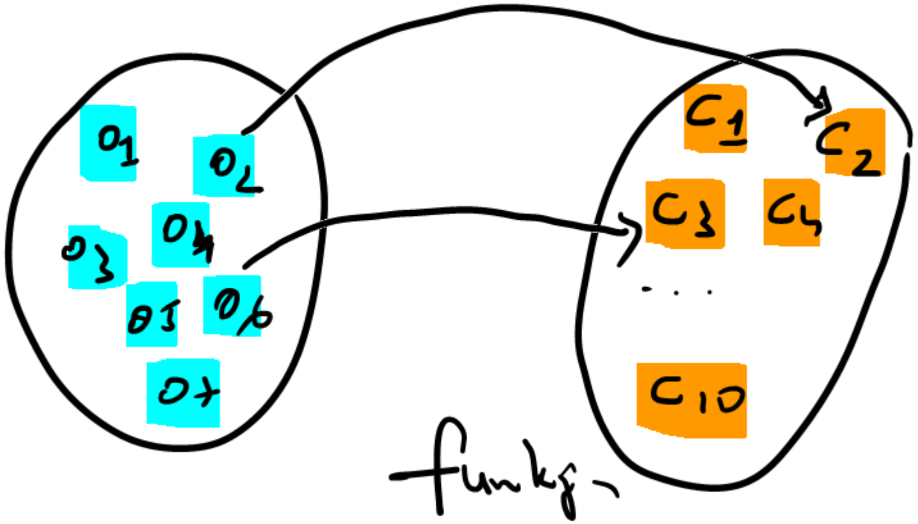
$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

- *Liczba różnowartościowych funkcji z k-elementowego zbioru w n-elementowy zbiór wynosi*

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot ((n-k)+1).$$

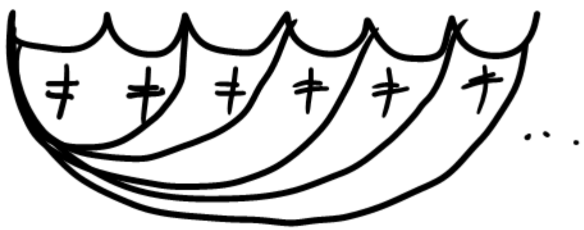


W kawiarni, do której przyszło siedem osób, było 10 gatunków ciastek. Każdy kupił jedno ciastko, przy czym każdy kupił inne. Na ile sposobów można było kupić ciastka? ◀ **PRZYKŁAD**



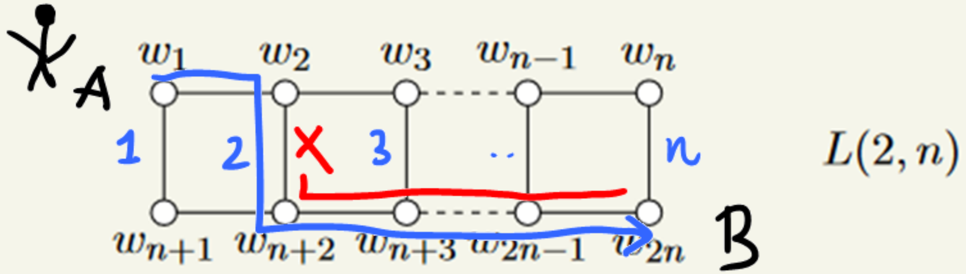
10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4

_ _ _ _ _ _ _ ciąg



7 * 6 * 9 * 5 * 4 * 8 * 10

Turysta ma przedostać się najkrótszą ścieżką z wierzchołka w_1 do wierzchołka w_{2n} w kracie $L(2,n)$, a następnie wrócić z wierzchołka w_{2n} do wierzchołka w_1. Na ile sposobów może on wybrać taką trasę, jeśli nie chce wracać tą samą ścieżką? ◀ **PRZYKŁAD**



Zauważmy, że istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy rozważanymi trasami a różnowartościowymi funkcjami

$$f\colon \{\overset{\text{tam}}{w_1 \rightsquigarrow w_{2n}}, \overset{\text{z powrotem}}{w_{2n} \rightsquigarrow w_1}\} \longrightarrow \{\overset{1}{w_1 w_{n+1}}, \overset{2}{w_2 w_{n+2}}, \ldots, \overset{n}{w_n w_{2n}}\},$$

a tym samym, na mocy twierdzenia 1.2, liczba takich różnych tras/funkcji wynosi $n(n-1)$.

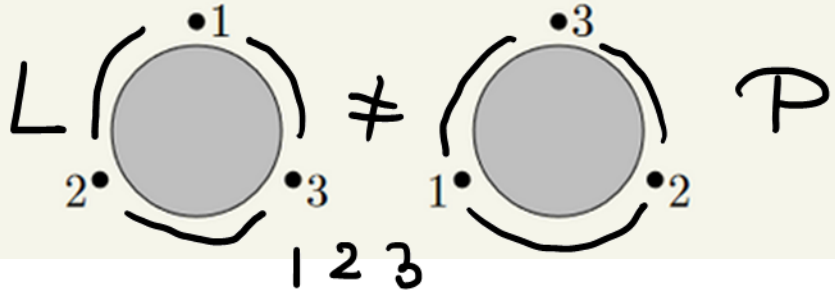
Odp: $n * (n-1)$

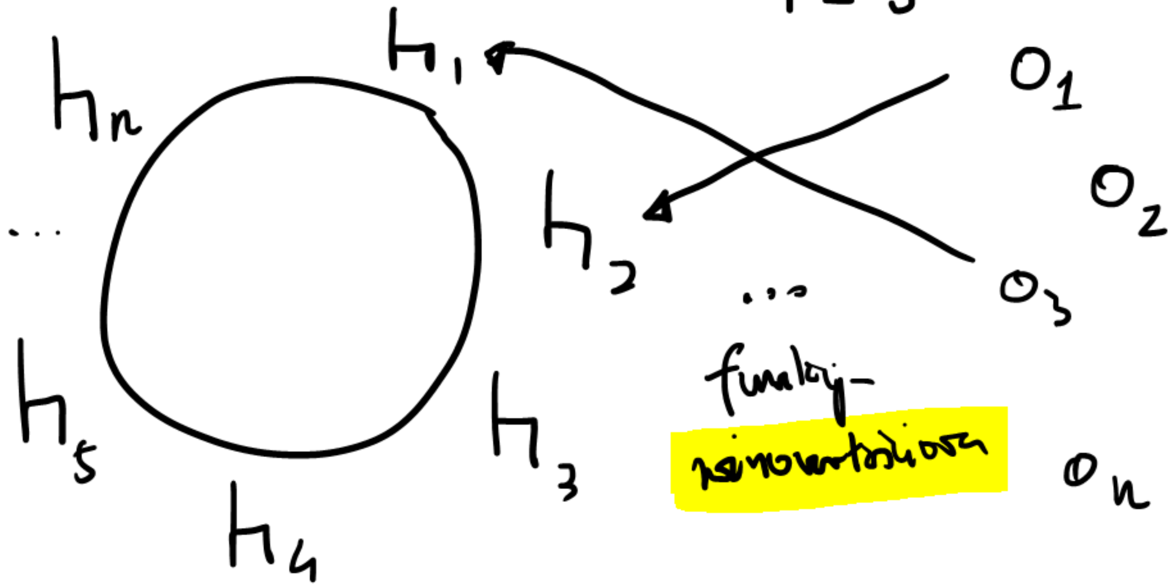
PERMUTACJE

TWIERDZENIE 1.3 (Permutacje)
Liczba permutacji (czyli n-elementowych ciągów bez powtórzeń o elementach ze zbioru n-elementowego) wynosi

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Na ile sposobów można rozsadzić n-osób przy okrągłym n-osobowym stole? Rozsadzenia przedstawione na poniższym rysunku traktujemy jako różne. ◀ **PRZYKŁAD**





Odp: $n!$

PERMUTACJE Z POWTÓRZENIAMI

TWIERDZENIE 1.4 (Permutacje z powtórzeniami)
Niech dane będzie n elementów, gdzie elementów typu 1 (nierozróżnialnych) jest n_1, elementów typu 2 (nierozróżnialnych) jest n_2, ..., elementów typu k (nierozróżnialnych) jest n_k. Wówczas liczba sposobów, na które można uporządkować te elementy w rzędzie, wynosi

$$\binom{n}{\underbrace{n_1, n_2, \ldots, n_k}_{\sum_{i=1}^{k} n_i = n}} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Ile różnych 5-literowych słów (ciągów) można utworzyć z liter słowa: ◄ **PRZYKŁAD**

a) ULICA;
b) MARTA;
c) LALKA?

$\{A, C, I, L, U\}$ 5 różnych liter

$\{A, A, M, R, T\}$

$\{A, A, L, L, K\}$

$\binom{5}{1,1,1,1,1} = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 5!$

$\binom{5}{2,1,1,1} = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 5!/2!$

Mając na uwadze twierdzenie 2.4 oraz:

a) że wszystkie litery w słowie ULICA są różne, otrzymujemy 5!;
b) że w słowie MARTA są dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!}$;
c) że w słowie LALKA mamy dwie litery 'L' i dwie litery 'A', otrzymujemy $\frac{5!}{2!2!}$.

$n=6$

3! to samo słowo

$\binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5!}{2!\,2!}$

KOMBINACJE BEZ POWTÓRZEŃ

n elementów

TWIERDZENIE 1.5 (Kombinacje bez powtórzeń)
Liczba wyborów k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na ile sposobów można podzielić 8-osobową grupę $\{o_1, \ldots, o_8\}$ na dwie grupy, 5-osobową i 3-osobową, a na ile sposobów można podzielić tę grupę na dwie równoliczne grupy? ◀ **PRZYKŁAD**

$n = 8$

1 2 3 4 5 6 7 8

$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$

A — 5 osób: 1 2 3 5 6

np.

B — 3 osoby: 4 7 8

Odp: $\binom{8}{5}$

4 osoby: 1 2 5 8 | 3 4 6 7

$\binom{8}{4}$

to samo

4 osoby: 3 4 6 7 | 1 2 5 8

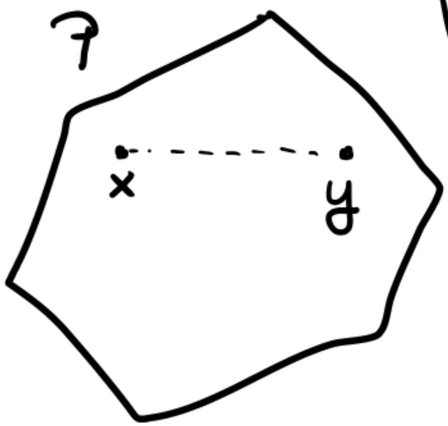
odp: $\binom{8}{4} \cdot \frac{1}{2}$

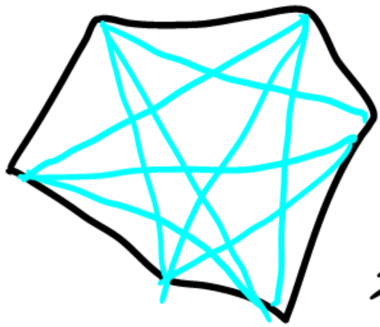
KOMBINACJE BEZ POWTÓRZEŃ

TWIERDZENIE 1.5 (Kombinacje bez powtórzeń)
Liczba wyborów k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

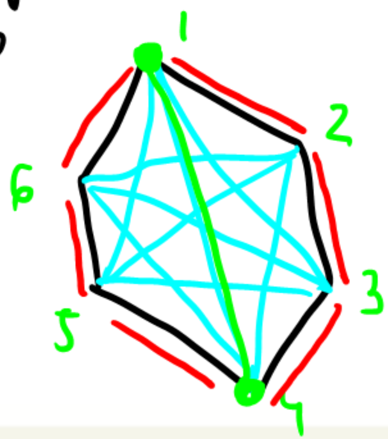
$\forall\, x,y \in P$ odcinek $\overline{xy} \subseteq P$, zatem P jest wypukły





$n=6$

$\# = 9$



to nie jest wypukłe

Ile przekątnych ma n-wierzchołkowy wielokąt wypukły? ◀ **PRZYKŁAD**

Zauważmy, że każda przekątna odpowiada parze wierzchołków, za wyjątkiem tych par, które tworzą kolejne krawędzie wielokąta. Tym samym, mając na uwadze twierdzenie 1.5, liczba takich przekątnych równa jest $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

np: $n = 6$ $\quad \frac{6\cdot(6-3)}{2} = 9$

LICZBY STIRLINGA DRUGIEGO RODZAJU ORAZ LICZBY BELLA

Liczba pogrupowań n różnych obiektów w dokładnie k grupach to *podzbiorowa liczba Stirlinga*, nazywana też *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Określa ona liczbę sposobów podziału n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów i oznaczana jest przez $\left\{ n \atop k \right\}$ lub $S(n, k)$.

LICZBY STIRLINGA DRUGIEGO RODZAJU ORAZ LICZBY BELLA

Liczba pogrupowań n różnych obiektów w dokładnie k grupach to *podzbiorowa liczba Stirlinga*, nazywana też *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Określa ona liczbę sposobów podziału n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów i oznaczana jest przez $\left\{ n \atop k \right\}$ lub $S(n, k)$.

Istnieje siedem sposobów podziału zbioru $X = \{1, 2, 3, 4\}$ na dwie części. ◀ **PRZYKŁAD**

$k=2$

$n=4$

$$\overset{A}{\{1,2,3\}} \cup \overset{\bar{A}}{\{4\}},\ \overset{B}{\{1,2,4\}} \cup \overset{\bar{B}}{\{3\}},\ \{1,3,4\} \cup \{2\},\ \{2,3,4\} \cup \{1\},$$

$$\{1,2\} \cup \{3,4\},\ \{1,3\} \cup \{2,4\},\ \{1,4\} \cup \{2,3\}.$$

Stąd otrzymujemy, że $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$. Zauważmy, że podział zbioru na dwie części tworzony jest zawsze przez niepusty podzbiór A oraz jego dopełnienie $X \setminus A$. Ponadto podział $A \cup (X \setminus A)$ jest równoważny podziałowi $(X \setminus A) \cup A$. W konsekwencji możemy zauważyć, że dla $n > 0$ zachodzi

$$\left\{ n \atop 2 \right\} = \frac{2^n}{2} - 1 = 2^{n-1} - 1.$$

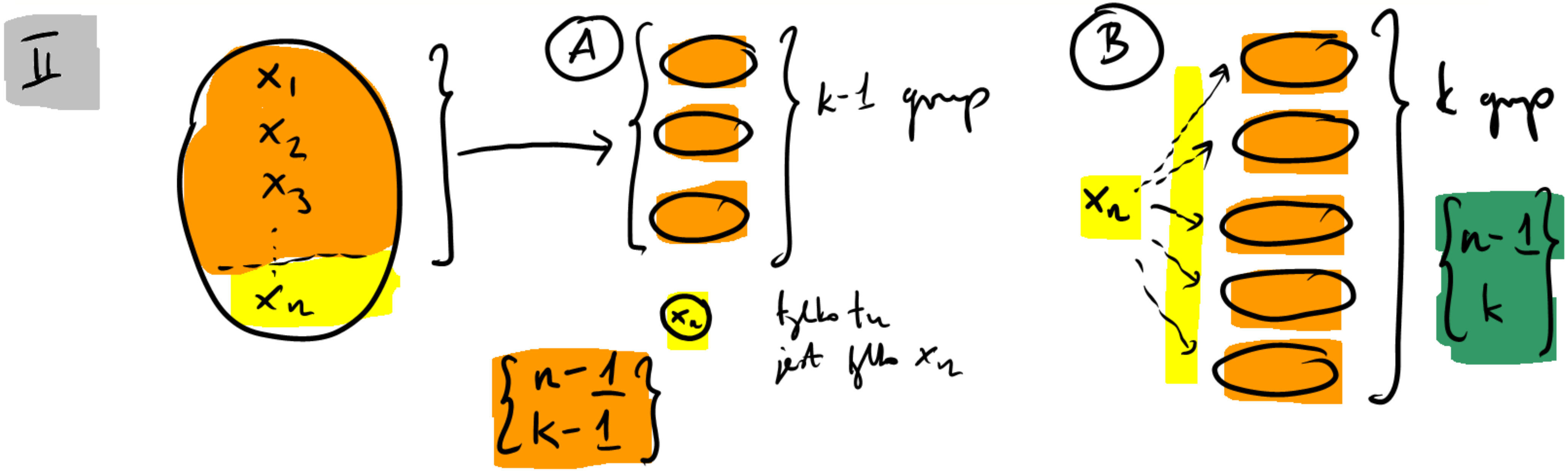
Twierdzenie 1.6 (Liczby Stirlinga drugiego rodzaju)

I
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają także następujacy wzór rekurencyjny:

II
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

dla $0 < k < n$, a ponadto $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ dla $n \geq 0$ oraz $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ dla $n \geq 1$.



TWIERDZENIE 1.6 (Liczby Stirlinga drugiego rodzaju)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$
$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju spełniają także następujacy wzór rekurencyjny:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

dla $0 < k < n$*, a ponadto* $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ *dla* $n \geq 0$ *oraz* $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ *dla* $n \geq 1$.

Wyznacz liczbę podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ na trzy części. ◀ **PRZYKŁAD**

Szukana liczba to $\left\{ {4 \atop 3} \right\}$, a jej wartość obliczamy reukrencyjnie korzystając z twierdzenia 1.6.

$$\begin{aligned} \left\{ {4 \atop 3} \right\} &= \left\{ {3 \atop 2} \right\} + 3 \cdot \left\{ {3 \atop 3} \right\} = \left(\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \cdot \left\{ {2 \atop 2} \right\} \right) + 3 \cdot 1 = \left[\left(\left\{ {1 \atop 0} \right\} + 1 \cdot \left\{ {1 \atop 1} \right\} \right) + 2 \cdot 1 \right] + 3 \\ &= [(0 + 1 \cdot 1) + 2] + 3 = 6. \end{aligned}$$

A zatem istnieje 6 podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ na trzy części.

Liczba B_n możliwych pogrupowań n różnych obiektów nosi nazwę *liczby Bella.* A zatem liczba Bella B_n jest sumą liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. = \underbrace{\left\{ {n \atop 0} \right\}}_{=0} + \left\{ {n \atop 1} \right\} + \left\{ {n \atop 2} \right\} + \ldots + \left\{ {n \atop n} \right\}$$

Zbiór $\{1, 2, 3\}$ ma 5 podziałów: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\overset{k=1}{\{\{1,2,3\}\}},\ \overbrace{\{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\}}^{k=2},\ \underset{k=3}{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}},$$

a zatem $B_3 = 5.$

Liczby Bella spełniają następujący wzór rekurencyjny:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, n \in \mathbb{N}.$$

Oraz „wzór Dobińskiego”:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Liczba B_n możliwych pogrupowań n różnych obiektów nosi nazwę *liczby Bella*. A zatem liczba Bella B_n jest sumą liczb Stirlinga drugiego rodzaju:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Zbiór $\{1, 2, 3\}$ ma 5 podziałów: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1,3\},\{2\}\},\ \{\{2,3\},\{1\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

a zatem $B_3 = 5$.

Na ile sposobów można podzielić 4-osobową grupę na podgrupy? ◀ **PRZYKŁAD**

Zadanie sprowadza się do wyznaczenia czwartej liczby Bella B_4. Mając na uwadze ich podany wyżej wzór (w oparciu o liczby Stirlinga drugiego rodzaju), otrzymujemy, że

$$B_4 = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {4 \atop i} \right\} = \underset{0}{\left\{ {4 \atop 0} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {4 \atop 1} \right\}} + \underset{7}{\left\{ {4 \atop 2} \right\}} + \underset{6}{\left\{ {4 \atop 3} \right\}} + \underset{1}{\left\{ {4 \atop 4} \right\}} = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

A zatem 4-osobową grupę możemy podzielić na podgrupy na 15 różnych sposobów.

NIEUPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

Niech $n, k \in \{1, 2, \dots\}$. Interesuje nas, na ile sposobów można zapisać liczbę n w postaci sumy k składników

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$. Każdy taki ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nazywany jest (nieuporządkowanym) *podziałem liczby* n na k składników, a liczba takich podziałów oznaczana jest przez $P(n, k)$, natomiast liczba wszystkich podziałów liczby n (dla $k = 1, 2, \dots, n$) oznaczana jest przez $P(n)$.

Istnieje jedenaście podziałów liczby 6. ◀ **PRZYKŁAD**

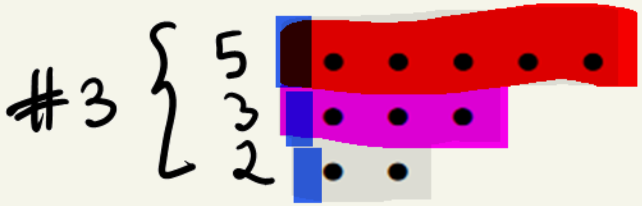
6
5 1 ← 1,5 to samo
4 2
4 1 1
3 3
3 2 1
3 1 1 1 ← 1, 3, 1, 1 to samo
2 2 2
2 2 1 1
2 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1

Stąd otrzymujemy, że $P(6, 1) = 1$, $P(6, 2) = 3$, $P(6, 3) = 3$, $P(6, 4) = 2$, $P(6, 5) = 1$ oraz $P(6, 6) = 1$, a zatem $P(6) = 11$.

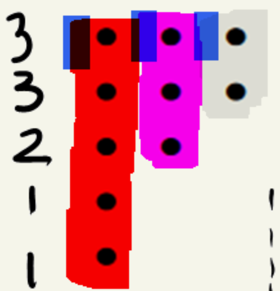
Dla podziału $P = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ liczby n można utworzyć tzw. *diagram Ferrersa*: ma on k wierszy i zawiera dokładnie a_i punktów w i-tym wierszu. *Podział sprzężony* do podziału P otrzymujemy transponując (zamieniając) miejscami wiersze i kolumny diagramu Ferrersa dla P, otrzymujac tym samym *sprzężony diagram Ferrersa.*

Rozważmy podział $(5, 3, 2)$ liczby 10. Diagram Ferrersa dla tego podziału wygląda następująco: **◀ PRZYKŁAD**

$n=10$
$k=3$



Sprzężony diagram Ferrersa wygląda natomiast tak:



i odpowiada on podziałowi $(3, 3, 2, 1, 1)$ liczby 10.

$\#=3$

Zauważmy, że transpozycja diagramu Ferrersa daje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby n na k składników a podziałami tej liczby o największym składniku równym k, co prowadzi do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1.8 (Podziały liczby)
Liczba podziałów liczby n na k składników jest równa liczbie podziałów liczby n, w których największy składnik równy jest k.

Wyznacz wszystkie podziały liczby 10 na trzy składniki. ◀ **PRZYKŁAD**

W podziale liczby 10 na trzy składniki największy składnik może być równy 8 — chodzi o podział $(8, 1, 1)$, a jego diagram Ferrersa jest następujący:

• • • • • • • •
•
•

W oparciu o ten diagram możemy wygenerować wszystkie szukane podziały. Są one następujące:

8	1	1
7	2	1
6	3	1
6	2	2
5	4	1
5	3	2
4	4	2
4	3	3

8-1, 1+1, 1
7 2 1
7-1, 2+1, 1
6, 3, 1
6-1, 3+1, 1
5, 4, 1

— — —
-1 +1
poprawne (≥)
OK

8 0 2 :(
8 1-1 1+1
7 2-1 1+1
1 2
6, 3-1, 1+1
6, 2, 2

5-1, 4+1, 1
5, 4-1, 1+1
5, 3, 2
...

6-1, 2+1, 2
5, 3, 2

$n = 8$

$k = 3$

8	1	1
7	2	1
6	3	1
6	2	2
5	4	1
5	3	2
4	4	2
4	3	3

Mamy osiem podziałów. Czy są to wszystkie podziały? Tak, niemniej dla pewności, mając na uwadze twierdzenie 1.8, możemy wygenerować jeszcze wszystkie podziały 10, w których największy składnik równy jest 3. Te podziały są następujące:

3	1	1	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1	
3	2	2	1	1	1		
3	2	2	2	1			
3	3	1	1	1	1		
3	3	2	1	1			
3	3	2	2				
3	3	3	1				

Tych podziałów jest także osiem.

TWIERDZENIE 1.9 (Podziały liczby — zależność rekurencyjna)

Zachodzi następująca zależność rekurencyjna:

$$P(n,k) = \begin{cases} 0 & n = k = 0 \text{ lub } n < k; \\ 1 & k = 1 \text{ oraz } n \geq k; \\ P(n-1,k-1) + P(n-k,k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$P(10,3)$ $P(9,2)$ $P(7,3)$

8	1	1
7	2	1
6	3	1
6	2	2
5	4	1
5	3	2
4	4	2
4	3	3

$x_k = 1$

$8+1 \quad +1$

$7+2 \quad +1$

$6+3 \quad +1$

$5+4 \quad +1$

$= 9 \quad +1$

$$n = \overbrace{\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1}}_{\text{suma} = n-1}}^{k-1 \text{ składników}} + x_k$$

$+1$

$x_k \geq 2 \implies x_i \geq 2$

$n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} + x_k$

$k=3$

$6+2+2 \quad -1 \quad$ (łącznie -3)

$\Sigma=7 \quad 5 \quad 1 \quad 1$

$5+3+2 \quad -1 \quad$ (łącznie -3)

$\Sigma=7 \quad 4 \quad 2 \quad 1$

$4+4+2 \quad -1 \quad$ (łącznie -3)

$\Sigma=7 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$4+3+3 \quad -1 \quad$ (łącznie -3)

$\Sigma=7 \quad 3 \quad 2 \quad 2$

TWIERDZENIE 1.9 (Podziały liczby — zależność rekurencyjna)
Zachodzi następująca zależność rekurencyjna:

$$P(n,k) = \begin{cases} 0 & n = k = 0 \text{ lub } n < k; \\ 1 & k = 1 \text{ oraz } n \geq k; \\ P(n-1,k-1) + P(n-k,k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W oparciu o wzór rekurencyjny z twierdzenia 1.9 wyznacz liczbę $P(10,3)$. ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} P(10,3) &= P(9,2) + P(7,3) = (P(8,1) + P(7,2)) + (P(6,2) + P(4,3)) \\ &= [1 + (P(6,1) + P(5,2))] + [(P(5,1) + P(4,2)) + (P(3,2) + P(1,3))] \\ &= 1 + 1 + P(5,2) + 1 + P(4,2) + P(3,2) + 0 \\ &= 3 + (P(4,1) + P(3,2)) + (P(3,1) + P(2,2)) + (P(2,1) + P(1,2)) \\ &= 3 + 1 + (P(2,1) + P(1,2)) + 1 + 1 + 1 + 0 = 7 + 1 + 0 = 8. \end{aligned}$$

UPORZĄDKOWANY PODZIAŁ LICZBY

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 3+1+1+1 \\ 6 &= 1+3+1+1 \\ 6 &= 1+1+3+1 \\ 6 &= 1+1+1+3 \end{aligned}\right\} \text{ różne podziały}$$

Ile jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest dodatnią liczbą całkowitą?

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Ile jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą?

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_k = n \qquad x_i \geq 0, \text{ całkowite}$$

dodaj do każdego x_i „+1": $(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)+\dots+(x_k+1) = n+k$

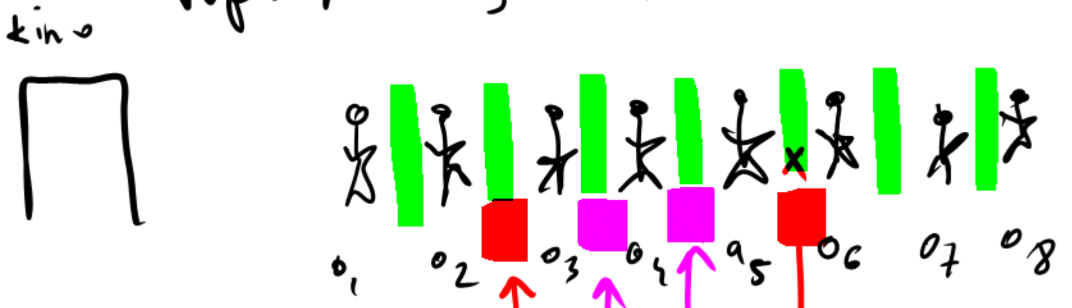
podstawiam $y_i = x_i+1$ $\qquad y_1+y_2+y_3+\dots+y_k = n+k \qquad y_i \geq 1$, całkowite

W kolejce do kina stoi n osób. Osoby te są wpuszczane do kina w k grupach, z których każda składa się z jednej lub więcej osób. Na ile sposobów można utworzyć tych k grup? ◀ **PRZYKŁAD**

Np: $n=8$, $k=3$

wstawiam dwie bramki

dostępnych 7 pozycji



$$\binom{7}{2} = \binom{8-1}{3-1}$$

wstawiam bramki

2 3 3 $\Sigma=8$

wstawiam bramki

3 1 4 $\Sigma=8$

$$x_1 + y_2 + x_3 = 8$$

Analogicznie w ogólnym przypadku — każdy z szukanych podziałów n-osobowej kolejki odpowiada wstawieniu $k-1$ bramek $\times$ na $k-1$ pozycjach spośród $n-1$ możliwych pozycji pomiędzy n osobami (aby powstało k grup, z których każda jest niepusta). A zatem tutaj liczba takich podziałów wynosi $\binom{n-1}{k-1}$.

$k = 5, \quad n = 6$ $\qquad\qquad$ $5+6-1 = 10$

$4 = 5-1$

Wyznacz, ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą? ◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy kratę $L(5, 7)$ oraz jakąś najkrótszą ścieżkę Π z wierzchołka A do wierzchołka B (przedstawione na rysunku poniżej). Niech x_i, $i = 1, \ldots, 5$, będzie liczbą poziomych krawędzi na i-tym poziomie na ścieżce Π (patrz rysunek poniżej): mamy $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1$ oraz $x_5 = 2$. Wówczas, jak łatwo zauważyć, zachodzi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$.

$L(5,7)$: 5 wierszy, 7 kolumn

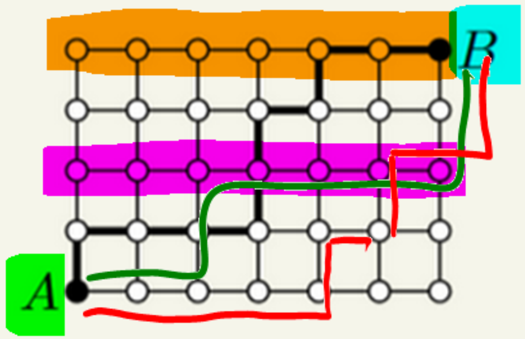
poziom 5 ------ $\qquad x_5 = 2$

poziom 4 ------ $\qquad x_4 = 1$

poziom 3 ------ $\qquad x_3 = 0$

poziom 2 ------ $\qquad x_2 = 3$

poziom 1 ------ $\qquad x_1 = 0$



$\Sigma = 6$

$x_5 = 0$

$x_4 = 0$

$x_3 = 4$

$x_2 = 0$

$x_1 = 2$

$\Sigma = 6$

$$\binom{\overbrace{6+5-1}^{n+k-1}}{\underbrace{5-1}_{k-1}}$$

$6 = 4 + 1 + 1 + 0 + 0$

WNIOSEK: liczba naszych ścieżek to liczba naszych sum

pojedyncza najkrótsza ścieżka ma $\underbrace{4}_{\text{pionowe łącznie}} + \underbrace{6}_{\text{poziome łącznie}} = 10$ kawałków

$p_1 \; p_2 \; p_3 \; \ldots \; p_{10}$

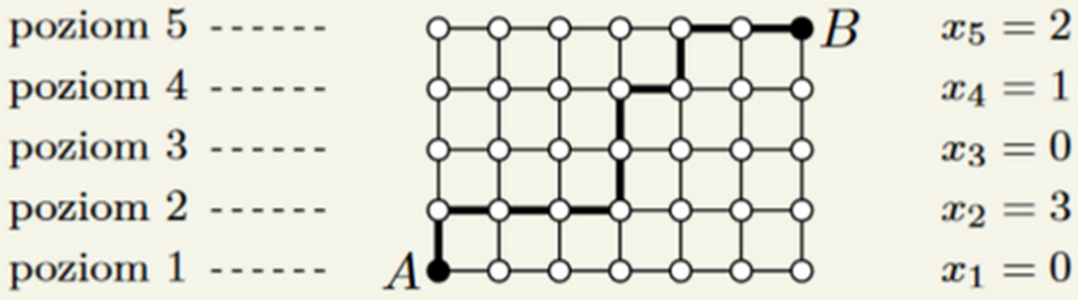
→ → ↑ ↑ → → → → ↑ ↑

→ → → → ↑ → ↑ → ↑ ↑

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4}$$

Wyznacz, ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą? ◀ **PRZYKŁAD**

Rozważmy kratę $L(5,7)$ oraz jakąś najkrótszą ścieżkę Π z wierzchołka A do wierzchołka B (przedstawione na rysunku poniżej). Niech x_i, $i = 1, \ldots, 5$, będzie liczbą poziomych krawędzi na i-tym poziomie na ścieżce Π (patrz rysunek poniżej): mamy $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 1$ oraz $x_5 = 2$. Wówczas, jak łatwo zauważyć, zachodzi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$.

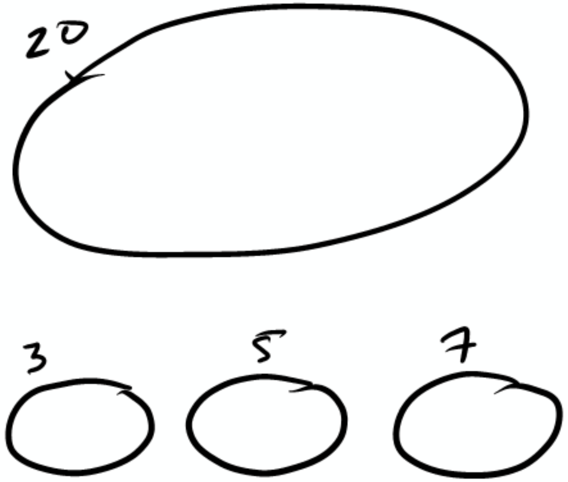


Z drugiej strony, jeśli rozważymy dowolne rozwiązanie równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, np. $x_1 = 4, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ oraz $x_5 = 2$, to takiemu rozwiązaniu możemy przyporządkować najkrótszą ścieżkę z wierzchołka A do wierzchołka B, która na każdym z poziomów i ma x_i poziomych krawędzi. W konsekwencji, mając na uwadze rozwiązanie przykładu powyżej, poszukiwana liczba rozwiazań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, gdzie każde x_i jest nieujemną liczbą całkowitą, wynosi $\binom{10}{4}$.

ZASADA PODWÓJNEGO ZLICZANIA

ZADANIE 2.7. Na ile sposobów można utworzyć trzy rozłączne komisje z osób wybranych z 20-osobowej grupy, jeśli muszą one mieć odpowiednio 3, 5 oraz 7 członków?

$$\frac{20!}{3!\cdot 5!\cdot 7!\cdot 5!}$$



II → wybranie grupy z 20 osób

$$\binom{20}{3}\cdot\binom{17}{5}\cdot\binom{12}{7}$$

$$\|$$

I → ustalić 15 osób $(15 = 3+5+7)$

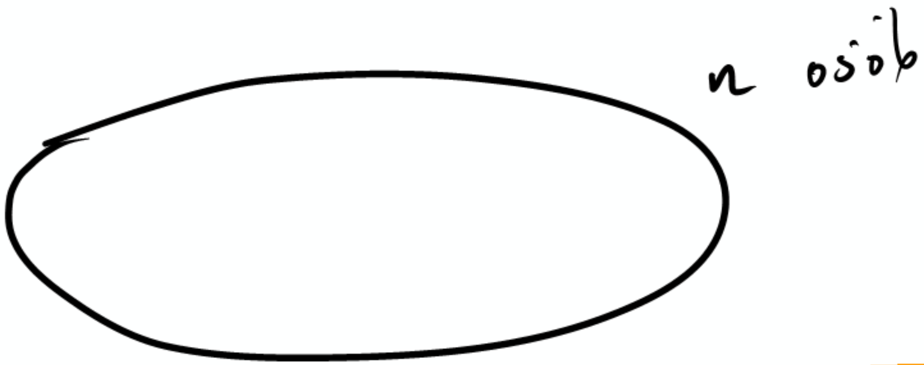
→ dobranie podziału tych 15 osób

$$\binom{20}{15}\cdot\binom{15}{3}\cdot\binom{12}{5}\binom{7}{7} = \frac{20!}{3!\cdot(5!)^2\cdot 7!}$$

ZASADA PODWÓJNEGO ZLICZANIA

Udowodnij równość $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. ◀ **PRZYKŁAD**

Rozważamy wybór k-osobowej drużyny z kapitanem z n osób.



I. • wybrać drużynę
• wybrać kapitana z tej drużyny

II. • wybrać kapitana
• dobrać drużynę dla kapitana

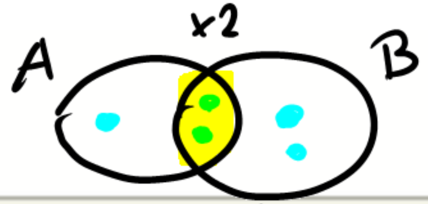
zliczamy to samo

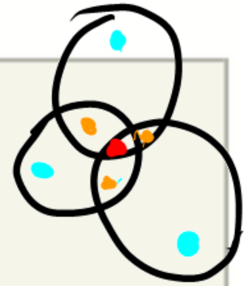
L=P

$$\binom{n}{k}\binom{k}{1} = k\cdot\binom{n}{k} = L$$

$$\binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\binom{n-1}{k-1} = P$$

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA





Twierdzenie 1.10 (Zasada włączania i wyłączania)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|, \text{ gdzie } A_I = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Wyznacz liczbę elementów $|A \cap B \cap C|$ oraz $|C|$ wiedząc, że $|A| = 12$, $|B| = 10$, $|A \cap B| = 4$, $|B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 2$, $|A \cup B \cup C| = 20$. ◀ **PRZYKŁAD**

Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że $|C| + |A \cap B \cap C| = 6$. Zauważmy, że $|A \cap B \cap C| \leq |B \cap C| = 2$, a zatem $|A \cap B \cap C|$ może być równe 0, 1 lub 2. Otrzymujemy wtedy, że $|C| \in \{4, 5, 6\}$.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$20 = 12 + 10 + |C| - 4 - 2 - 2 + |A \cap B \cap C|$

$6 = |C| + |A \cap B \cap C|$

6	0	3	3	0	6
5	1	2	4		
4	2	1	5		

$|A \cap B \cap C| \leq |C|$ (*)

Oblicz, ile dodatnich liczb mniejszych od 100 jest podzielnych przez 2, 3 lub 5. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $D_k = \{n \in \{1, \dots, 99\} : n$ jest podzielne przez $k\}$. Wówczas:

- $|D_2| = \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 49$, $|D_3| = \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 33$, $|D_5| = \lfloor \frac{99}{5} \rfloor = 19$;
- $|D_2 \cap D_3| = \lfloor \frac{99}{2\cdot 3} \rfloor = 16$, $|D_2 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2\cdot 5} \rfloor = 9$, $|D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{3\cdot 5} \rfloor = 6$;
- $|D_2 \cap D_3 \cap D_5| = \lfloor \frac{99}{2\cdot 3\cdot 5} \rfloor = 3$.

Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że

$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 49 + 33 + 19 - 16 - 9 - 6 + 3 = 73.$$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\dots, 99$

$D_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots 30, 98\}$

$D_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 30, \dots\}$

$D_5 = \{5, 10, 15, 30,\}$

$1 \dots n$

$n = 99$

!

$1 \dots 999990$

$D_2 = \lfloor \frac{999990}{2} \rfloor$

$\dots 2, 3, 8$

$|D_2| = \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 49$ $\quad |D_2 \cap D_3| = \lfloor \frac{99}{2\cdot 3} \rfloor$ $\quad |D_2 \cap D_3 \cap D_8| = ?\ \lfloor \frac{99}{24} \rfloor$

$|D_3| = \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 33$ $\quad |D_2 \cap D_8| = ?\ \lfloor \frac{99}{8} \rfloor$

$|D_8| = \lfloor \frac{99}{8} \rfloor = 12$ $\quad |D_3 \cap D_8| = \lfloor \frac{99}{3\cdot 8} \rfloor$

$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = |D_2| + |D_3| + |D_5| - |D_2 \cap D_3| - |D_2 \cap D_5| - |D_3 \cap D_5| + |D_2 \cap D_3 \cap D_5|$$

$$\left| D_{k_1} \cap D_{k_2} \cap D_{k_3} \cap \dots \cap D_{k_t} \right| \quad !$$

$$= \left\lfloor \frac{\dots ?}{NWW(k_1, k_2, k_3, \dots k_t)} \right\rfloor$$

najmniejsza wspólna wielokrotność

np. $\left\lfloor \frac{99}{NWW(2,3,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{99}{24} \right\rfloor = \left| D_2 \cap D_3 \cap D_8 \right|$

ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

TWIERDZENIE 1.11 (Zasada szufladkowa Dirichleta)
Jeśli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, wówczas w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do wnętrza kwadratu Q o boku 4 cm zawsze są dwa punkty odległe od siebie o mniej niż 3 cm. ◀ **PRZYKŁAD**

$n = 21$ przedmiotów

$m = 5$

$21 > 5 \cdot 4$

$k = 4$ szuflady

$\cdots\cdots\cdots$ 21 $\cdot\cdot$

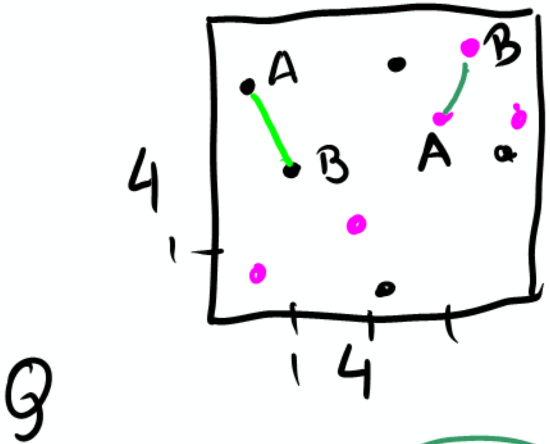
≤ 5 ≤ 5 ≤ 5 ≤ 5 $\quad \sum \leq 4 \cdot 5 = 20$

TEZA: $\exists$ szufladka przynajmniej z 6 kulkami
(>5)

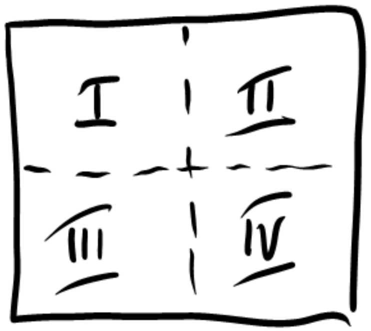
ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

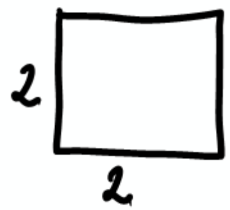
Twierdzenie 1.11 (Zasada szufladkowa Dirichleta)
Jeśli n przedmiotów rozmieścimy w k szufladkach oraz $n > km$, gdzie m jest pewną liczbą naturalną, wówczas w którejś szufladce znajdzie się więcej niż m przedmiotów.

Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do wnętrza kwadratu Q o boku 4 cm zawsze są dwa punkty odległe od siebie o mniej niż 3 cm. ◀ **PRZYKŁAD**



odległość $(A,B) < 3$





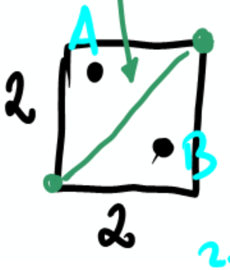
szufladka

$\forall$ 5 punktów (dowolne)

• 4 szufladki

istnieje szufladka z dwoma punktami (z zasady szufladkowej Dirichleta)

największa możliwa odległość $= 2\sqrt{2} < 3$



szufladka

zatem odległość $(A,B) < 3$

Algorytm generowania podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\emptyset$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze A:
  - znajdujemy największy element a nie należący do A, czyli
    $$a = \max\{i \notin A \ : \ i \in \{1, 2 \ldots, n\}\};$$
  - jeżeli nie ma takiego a, to rozważany podzbiór A jest ostatnim – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, dodajemy a do zbioru A, a następnie usuwamy z A wszystkie elementy większe od a.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Spośród elementów nienależących do A algorytm znajduje ten największy, czyli $a = 5$. Wstawiamy 5 do A i usuwamy wszystkie $x > 5$, czyli tutaj tylko 6, otrzymując podzbiór $\{1, 2, 3, 5\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

$\emptyset \longrightarrow \ldots \longrightarrow \{1,2,3,6\} \longrightarrow \{1,2,3,5\} \longrightarrow \ldots,$

$4 \notin, \quad 5 \notin$

$\{1,2,3,5,6\} \quad 6 > 5$

PRZYKŁAD ◀ Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Spośród elementów nienależących do A algorytm znajduje ten największy, czyli $a = 5$. Wstawiamy 5 do A i usuwamy wszystkie $x > 5$, czyli tutaj tylko 6, otrzymując podzbiór $\{1, 2, 3, 5\}$.

$\emptyset \to \dots \to \{1, 2, 3, 6\} \to \{1, 2, 3, 5\} \to \dots,$

$4 \notin, \ 5 \notin$

$\{1, 2, 3, 5, 6\} \quad 6 > 5$

$\{1, 2, 3, 5\} \to 4 \notin, \ 6 \notin \to \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$\{1, 2, 3, 5, 6\} \quad \square > 6$

$\{1, 2, 3, 5, 6\} \to 4 \notin \to \{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad 5 > 4, \ 6 > 4$

$\{1, 2, 3, 4\} \to 5 \notin, \ 6 \notin \to \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\{1, 2, 3, 4, 6\} \quad \square > 6$

....

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \notin ? \to$ STOP

	123456
$\{1,2,3,6\}$	111001
$\downarrow$	$+1$
$\{1,2,3,5\}$	111010
$\downarrow$	$+1$
$\{1,2,3,5,6\}$	111011
$\downarrow$	$+1$
$\{1,2,3,4\}$	111100
$\downarrow$	$+1$
$\{1,2,3,4,6\}$	111101
$\vdots$	$\vdots$

Algorytm generowania k-elementowych podzbiorów $\{1,\ldots,n\}$.

- pierwszy podzbiór to $\{1,\ldots,k\}$;
- kolejny podzbiór po podzbiorze $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$, gdzie $a_1<\cdots<a_k$:
  - znajdujemy najmniejsze i takie, że $a_i+1\notin A$;
  - jeżeli $a_i=a_n$, to rozważany podzbiór $A=\{n-k+1,\ldots,n\}$ jest ostatnim – Koniec;
  - w przeciwnym przypadku, zwiększamy a_i o jeden, a elementy mniejsze od a_i zamieniamy na $i-1$ najmniejszych kolejnych liczb, tzn. $a_j:=j$, dla $j<i$.

Rozważmy zbiór $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $\{2,3,4,6\}$. Algorytm znajduje $i=3$, bo $a_i=4$ i $a_i+1=5\notin\{2,3,4,6\}$. Zatem $a_i:=a_i+1=5$, a elementy a_1,a_2 przyjmują odpowiednio wartości 1 i 2. Zatem kolejny podzbiór to $\{1,2,5,6\}$. ◀ **PRZYKŁAD**

$\{1,2,3,4\} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \underbrace{\{2,3,4,6\}}_{A} \longrightarrow \{1,2,5,6\}$

$2,3\in A$

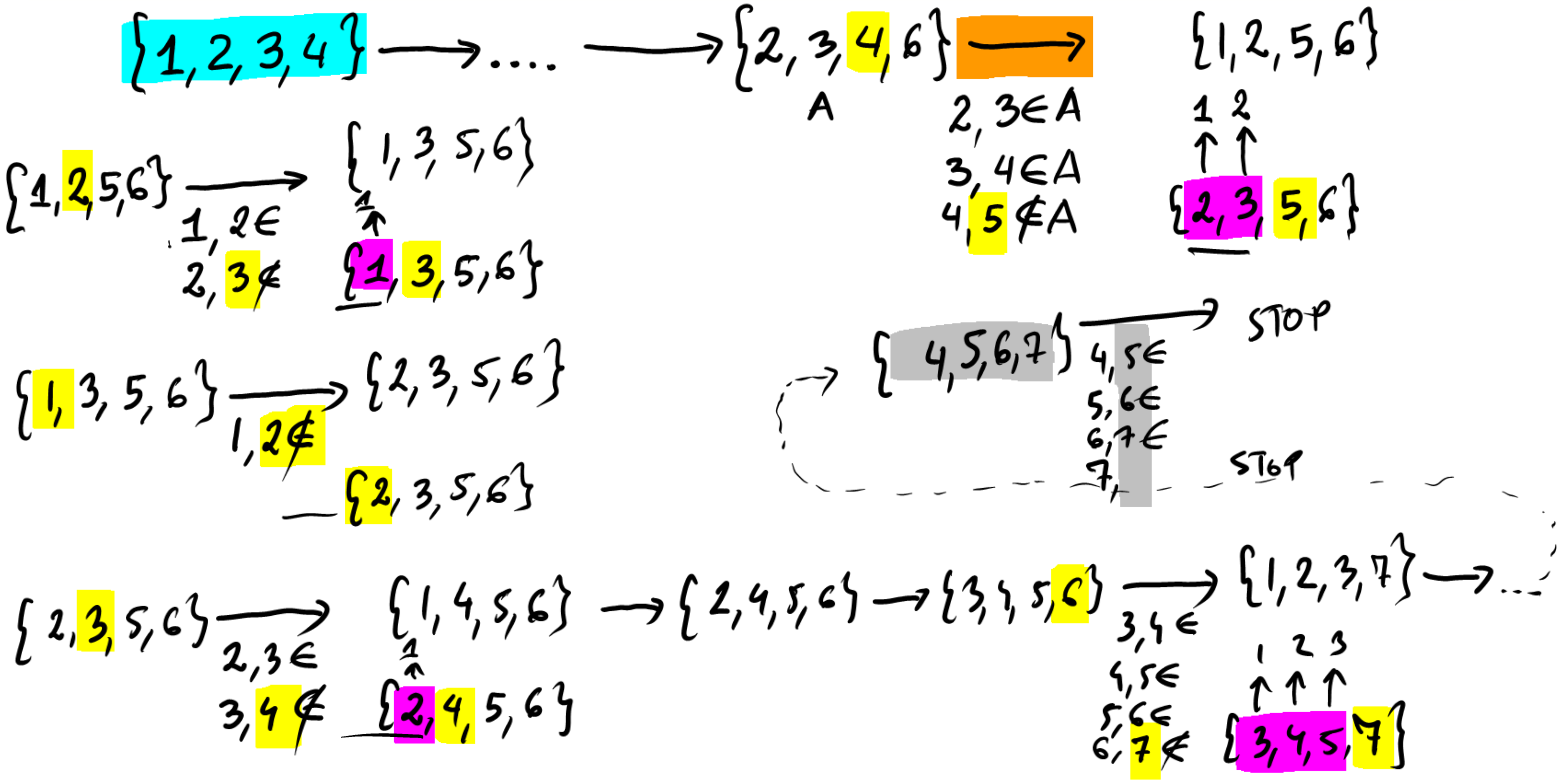
$3,4\in A$

$4,5\notin A$

$\{2,3,5,6\} \to \{1,2,5,6\}$

◄ PRZYKŁAD

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i załóżmy, że właśnie wygenerowaliśmy podzbiór $\{2, 3, 4, 6\}$. Algorytm znajduje $i = 3$, bo $a_i = 4$ i $a_i + 1 = 5 \notin \{2, 3, 4, 6\}$. Zatem $a_i := a_i + 1 = 5$, a elementy a_1, a_2 przyjmują odpowiednio wartości 1 i 2. Zatem kolejny podzbiór to $\{1, 2, 5, 6\}$.



Algorytm generowania permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

- pierwsza permutacja to $a_i = i$, dla $1 \leq i \leq n$,
- kolejna permutacja po permutacji $(a_1 \ldots a_n)$:
  - znajdujemy największe j spełniające warunek $a_j < a_{j+1}$;
  - jeżeli nie ma takiego j, to rozważana permutacja jest permutacją ostatnią – KONIEC;
  - w przeciwnym przypadku, zamieniamy a_j z najmniejszym a_k takim, że $a_k > a_j$ i $k > j$, a następnie odwracamy porządek elementów $a_{j+1}, \ldots, a_n$.

PRZYKŁAD Rozważmy permutację (436521). Algorytm znajduje $j = 2$ i $a_j = 3$. Mamy $3 < 6 = a_3$ oraz $3 < 5 = a_4$, zatem zamieniamy a_2 z a_4. Następnie odwracamy kolejność elementów a_3, a_4, a_5, a_6, otrzymując (451236).

$123456 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 436521 \longrightarrow 451236 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 654321$

$3 < 6$

$3 < 6$

$3 < 5$

456321

◀ PRZYKŁAD

Rozważmy permutację (436521). Algorytm znajduje $j = 2$ i $a_j = 3$. Mamy $3 < 6 = a_3$ oraz $3 < 5 = a_4$, zatem zamieniamy a_2 z a_4. Następnie odwracamy kolejność elementów a_3, a_4, a_5, a_6, otrzymując (451236).

.... $\longrightarrow$ 451236 $\longrightarrow$ 451263

3 < 6

3 < 6

451263

$\longrightarrow$ 451263 $\longrightarrow$ 451326 $\longrightarrow$ 451362

2 < 6

2 < 6

2 < 3

451362

$\longrightarrow$ 451623

$\longrightarrow$ 451632

....

$\longrightarrow$ 654321 STOP

PERMUTACJE RAZ JESZCZE

436521

$4 \to 1.$ przy.
$3 \to 2.$ przy.
$6 \to 3.$ przy.
...

■■■ Na permutację n-elementową można patrzeć jak na dowolną różnowartościową funkcję ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na ten sam zbiór. Na oznaczenie permutacji π używa się często zapisu

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Przykładem permutacji jest

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

która jest funkcją przyjmującą następujące wartości: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 3$ oraz $\pi(5) = 1$.

$f: X \longrightarrow Y$

$g: Y \longrightarrow Z$

$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ złożenie funkcji

$f(x) = x \leftarrow$ punkt stały funkcji f

Permutacje można składać tak, jak się składa funkcje. Złożenie permutacji π_1 i π_2 określone jest wzorem

$$\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x)).$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ oraz } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ich złożenie $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ wynosi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ponieważ $\pi(1) = \pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(3) = 4$, $\pi(2) = \pi_1(\pi_2(2)) = \pi_1(1) = 2$, $\pi(3) = \pi_1(\pi_2(3)) = \pi_1(4) = 3$, oraz $\pi(4) = \pi_1(\pi_2(4)) = \pi_1(2) = 1$.

Ponadto, jako że $\pi(2) = 2$ i $\pi(3) = 3$, to elementy 2 i 3 są *punktami stałymi* permutacji π.

■■■ Mówimy, że x jest *punktem stałym* permutacji $\pi : X \longrightarrow X$, jeśli $\pi(x) = x$. *Nieporządek* na zbiorze X jest permutacją π spełniającą warunek, że $\pi(x) \neq x$ dla każdego $x \in X$ (innymi słowy, nieporządek jest permutacją bez punktów stałych).

TWIERDZENIE 1.12 (Nieporządki)
Liczba D_n nieporządków dla n-elementowego zbioru X, nazywana dolną silnią *i oznaczana symbolem $!n$, dana jest wzorem*

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Liczbę D_n można też określić rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} !0 &= 1, \\ !1 &= 0, \\ !n &= (n-1)(!(n-1)+!(n-2)). \end{aligned}$$

Istnieje $3! = 6$ permutacji zbioru 3-elementowego: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nieporządki są jednak tylko dwa, ponieważ ze wzoru rekurencyjnego mamy:

$$\begin{aligned} !3 &= (3-1)(!(3-1)+!(3-2)) \\ &= 2(!2+!1)2((2-1)(!(2-1)+!(2-2))+0) = 2(1((!1+!0)) = 2. \end{aligned}$$

Są nimi permutacje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

P.1 ▷▷▷ W biegu bierze udział sześciu zawodników z (różnymi) numerami startowymi od 1 do 6. Na ile sposobów może zakończyć się ten bieg tak, aby każdy z zawodników zajął miejsce różne od swego numeru startowego? $!6$

P.2 ▷▷▷ Nauczyciel przeprowadził kartkówkę dla pięciu uczniów. Kartkówki chce rozdać do sprawdzenia (tym) samym uczniom. Na ile sposobów może to zrobić tak, żeby żaden z uczniów nie dostał do sprawdzenia swojej pracy? $!5$

■■■ Zbiór S_n wszystkich permutacji na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem złożenia ma następujące własności:

a) Złożenie permutacji jest łączne, czyli dla każdych trzech permutacji π_1, π_2 oraz π_3 zachodzi

$$\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3.$$

b) Wśród permutacji istnieje identyczność id, czyli permutacja, która każdemu x z dziedziny przypisuje wartość $id(x) = x$. Identyczność jest elementem neutralnym operacji składania permutacji, ponieważ dla każdej permutacji π zachodzi

$$\pi \circ id = id \circ \pi = \pi.$$

c) Dla każdej permutacji π istnieje permutacja odwrotna (funkcja odwrotna) π^{-1} spełniająca warunek

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id.$$

Na przykład dla permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutacją odwrotną π^{-1} jest

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Możemy sprawdzić np. dla $x = 3$:

$$\pi \circ \pi^{-1}(3) = \pi(\pi^{-1}(3)) = \pi(4) = 3.$$

Wyznaczenie permutacji odwrotnej odbywa się w następujący sposób: jeśli $\pi(x) = y$, to $\pi^{-1}(y) = x$, gdyż wówczas otrzymamy $\pi \circ \pi^{-1}(y) = \pi(\pi^{-1}(y)) = \pi(x) = y = id(y)$.

P.3 ▷▷▷ Mając dane poniżej permutacje π_1 i π_2, oblicz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^{-1}, π_2^{-1}, a następnie wyznacz ich punkty stałe.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

P.4 ▷▷▷ Wyznacz liczbę permutacji π ze zbioru S_6, które spełniają $\pi^2 = id$, $\pi \neq id$.

P.4:

π	1	2	3	4	5	6
	–	–	–	–	–	–
π	1	2	3	4	5	6

np. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

π	1	2	3	4	5	6
	2	1	3	5	4	6
π	1	2	3	4	5	6

■■■ Często stosuje się *cykliczną* notację permutacji. Rozważmy dla przykładu permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że $\pi(1) = 2, \pi(2) = 5$ oraz $\pi(5) = 1$ — mówimy tym samym, że elementy $1, 2$ oraz 5 tworzą *cykl* $(1\ 2\ 5)$ długości 3. Analogicznie, mając na uwadze, że $\pi(3) = 4$ oraz $\pi(4) = 3$, otrzymujemy cykl $(3\ 4)$ długości 2. Permutację π możemy teraz zapisać jako

$$\pi = (1\ 2\ 5) \circ (3\ 4),$$

to samo, co

$(3\ 4) \circ (1\ 2\ 5)$

albo równoważnie

$$\pi = (1\ 2\ 5)(3\ 4) \quad \text{(tzn. bez znaku operatora } \circ\text{).}$$

$(2\ 5\ 1)(4\ 3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\pi_1 \circ \pi_2(3) = \pi_1(\pi_2(3)) = \pi_1(4) = 4$ $\qquad$ $\pi_2 \circ \pi_1(3) = \pi_2(3) = 4$

$\pi_1 \circ \pi_2(1) = \pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(1) = 2$ $\qquad$ $\pi_2 \circ \pi_1(1) = \pi_2(\pi_1(1)) = \pi_2(2) = 2$

■■■ Każdą permutację π zbioru $X = \{1, \ldots, n\}$ możemy rozłożyć na rozłączne cykle w sposób następujący:

- Wybieramy dowolny element $x \in X$, który nie jest jeszcze w żadnym cyklu.
- Iterujemy permutację π otrzymując kolejno:

$$x, \pi^1(x), \pi^2(x), \pi^3(x), \ldots$$

  aż do uzyskania $\pi^j(x) = x$, gdzie $\pi^i(x) = \underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{i \text{ razy}}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, j$.

- Dodajemy do rozkładu cykl $\Big(x \ \pi^1(x) \ \pi^2(x) \ \pi^3(x) \ \ldots \ \pi^{j-1}(x)\Big)$.
- Jeśli w zbiorze X pozostały elementy niepokryte przez żaden cykl, to wracamy do kroku pierwszego.

■■■ Jeśli permutacja π złożona jest z k rozłącznych cykli, to zapisujemy ją jako

$$\pi = (x_1 \ \ldots)(x_2 \ \ldots)\ldots(x_k \ \ldots),$$

gdzie w kolejnych nawiasach są elementy kolejnych cykli zaczynających się odpowiednio od $x_1, \ldots, x_k$. Należy podkreślić, że nie ma znaczenia kolejność cykli, ani to, od jakiego elementu zaczynamy cykl — np. $(1\ 2\ 5)(3\ 4)$ i $(3\ 4)(2\ 5\ 1)$ oznaczają tę samą permutację — ważne natomiast są długości cykli i kolejność elementów je tworzących. A dokładnie, zachodzi następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1.13 (Rozkład permutacji na cykle)
Rozkład permutacji na cykle jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności cykli i elementów początkowych.

Rozważmy permutację **◀ PRZYKŁAD**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozkład π na cykle jest następujący:

- pierwszy cykl: $1, \pi(1) = 3, \pi(3) = 7, \pi(7) = 6, \pi(6) = 2, \pi(2) = 4, \pi(4) = 1$;
- drugi cykl: $5, \pi(5) = 5$, zatem 5 jest punktem stałym permutacji π;
- trzeci cykl: $8, \pi(8) = 9, \pi(9) = 8$.

Otrzymujemy ostatecznie $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
π_1	2	3	1	5	6	4	8	7
π_1	3	1	2	6	4	5	7	8
π_1	1	2	3	4	5	6	8	7

P.5 ▷▷▷ Niech $\pi_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)$ oraz $\pi_2 = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 6)(4)(8)$. Wyznacz $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^2, π_1^3, π_2^2, π_2^3 oraz π_1^{-1}, następnie podaj liczbę punktów stałych każdej z tych permutacji oraz przedstaw te permutacje w postaci cyklicznej.

P.6 ▷▷▷ Permutacja $\pi \in S_n$ jest nazywana *cykliczną*, jeśli jej postać w notacji cyklicznej składa się z jednego cyklu długości n. Uzasadnij, że istnieje dokładnie $(n-1)!$ permutacji cyklicznych w zbiorze S_n.

Dwanaście kart ponumerowanych 1, . . . , 12 leży na stole w następujący sposób: ◀ **PRZYKŁAD**

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

pozycje

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Zbieramy te karty od lewej do prawej, z kolejnych 4 wierszy, a następnie rozkładamy je, ale tym razem z góry na dół, w kolejnych 3 kolumnach.

1	5	9
2	6	10
3	7	11
4	8	12

1 5 9 2 6 10 3 7 11 4 8 12

Ile razy musimy powtórzyć powyższą operację, aby otrzymać pierwotne ułożenie kart?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 & 11 & 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

typ: $1^2 5^2$

1. cykl: (1)
2. cykl (2 4 10 6 5)
3. cykl. (3 7 8 11 9)
4. (12)

1	6	11
5	10	4
9	3	8
2	7	12

...

$(1)\underbrace{(2\ 4\ 10\ 6\ 5)}_{\text{dług.}=5}(3\ 7\ 8\ 11\ 9)(12)$ dług. = 5

NWW(5,5) = 5

Odp: 5

Dwanaście kart ponumerowanych $1, \ldots, 12$ leży na stole w następujący sposób: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{array}$$

Zbieramy te karty od lewej do prawej, z kolejnych 4 wierszy, a następnie rozkładamy je, ale tym razem z góry na dół, w kolejnych 3 kolumnach.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}$$

Ile razy musimy powtórzyć powyższą operację, aby otrzymać pierwotne ułożenie kart?

P.7 ▷▷▷ Rozwiąż powyższy problem z kartami przy założeniu, że dostępnych jest 20 kart i rozważamy ułożenie postaci: 5 wierszy po 4 karty.

■■■ *Typem permutacji* π nazywamy wektor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, gdzie c_i jest liczbą cykli długości i w rozkładzie π na cykle. Zazwyczaj typ permutacji zapisuje się jako $[1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}]$, przy czym często pomija się te wartości, dla których $c_i = 0$.

Permutacja $\pi = (1\ 3\ 7\ 6\ 2\ 4)(5)(8\ 9)$ ◀ **PRZYKŁAD**
ma jeden cykl długości 1, jeden cykl długości 2 oraz jeden cykl długości 6, a więc jest typu $[1^1 2^1 6^1]$.

■■■ *Transpozycja* to permutacja typu $[1^{n-2}2^1]$. Innymi słowy, transpozycja dokonuje tylko jednego przestawienia dwóch elementów.

Dla permutacji $\pi \in S_7$ ◀ **PRZYKŁAD**

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

mamy $\pi = (1)(2)(3\ 6)(4)(5)(7) = (3\ 6)$, a więc π jest typu $[1^5 2^1]$, czyli π jest transpozycją.

■■■ Ponadto zachodzi

$$(x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{k-1}\ x_k) = (x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1})\ldots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2).$$

A zatem, jako że na mocy twierdzenia 1.13 dowolna permutacja może być rozłożona na cykle, każda permutacja jest złożeniem transpozycji.

■■■ Permutacja jest *parzysta*, gdy jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, w przeciwnym wypadku jest *nieparzysta*. *Znak* $\operatorname{sign}(\pi)$ permutacji π to

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^r,$$

gdzie r jest liczbą transpozycji, na które można rozłożyć π.

◀ **PRZYKŁAD**

Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_9$ na cykle i transpozycje. Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest parzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozłóżmy najpierw permutację π na cykle:

- cykl pierwszy: $(1\ 3\ 4\ 5)$;
- cykl drugi: $(2\ 6)$;
- cykl trzeci: $(7\ 9\ 8)$.

A zatem $\pi = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 6)(7\ 9\ 8)$, a tym samym π jest typu $[2^1 3^1 4^1]$. Aby przedstawić teraz π jako złożenie transpozycji, najpierw rozkładamy każdy z cykli, zgodnie ze sposobem podanym wyżej:

- $(1\ 3\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)$. 3
- $(2\ 6)$ — bez zmian. 1
- $(7\ 9\ 8) = (7\ 8)(7\ 9)$. 2

nie można zmienić kolejności

nie można zmienić kolejności ale jest ok.

A zatem otrzymujemy, że $\pi = \underbrace{(1\,5)(1\,4)(1\,3)}(2\,6)\underbrace{(7\,8)(7\,9)}$ i π jest permutacją parzystą.

$\Sigma = 6$

P.8 ▷▷▷ Permutacje $\pi_1, \pi_2 \in S_7$ zadane tabelami:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

rozłóż na cykle i transpozycje. Wyznacz typy tych permutacji.

P.9 ▷▷▷ Rozłóż podaną permutację $\pi \in S_{14}$ na cykle i transpozycje. Wyznacz typ tej permutacji. Czy permutacja π jest nieparzysta?

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 10 & 8 & 13 & 9 & 11 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$