INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz REKURENCJA

Niech $P(n)$ oznacza formę zdaniową zmiennej n określoną w dziedzinie $\mathbb{N}$. Jeśli w miejsce n podstawimy dowolną liczbę naturalną, to $P(n)$ stanie się zdaniem prawdziwym albo fałszywym, zależnie od wartości n.

- Jeżeli, na przykład, $P(n)$ oznacza wypowiedź „n jest podzielne przez 5", to $P(10)$ jest zdaniem prawdziwym, natomiast $P(11)$ jest zdaniem fałszywym.
- Jeżeli $P(n)$ oznacza nierówność $n < n^3$, to $P(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej większej od 1, natomiast zdanie $P(1)$ jest fałszywe.

INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz REKURENCJA

Niech $P(n)$ oznacza formę zdaniową zmiennej n określoną w dziedzinie $\mathbb{N}$. Jeśli w miejsce n podstawimy dowolną liczbę naturalną, to $P(n)$ stanie się zdaniem prawdziwym albo fałszywym, zależnie od wartości n.

- Jeżeli, na przykład, $P(n)$ oznacza wypowiedź „n jest podzielne przez 5", to $P(10)$ jest zdaniem prawdziwym, natomiast $P(11)$ jest zdaniem fałszywym.
- Jeżeli $P(n)$ oznacza nierówność $n < n^3$, to $P(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej większej od 1, natomiast zdanie $P(1)$ jest fałszywe.

▶ ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

Indukcja matematyczna (*indukcja zupełna*), jest to metoda dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych. Opiera się ona na na następującej zasadzie.

Jeżeli:

1. *istnieje taka liczba naturalna n_0, że predykat $P(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,*

2. *dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,*

to $P(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

▶ DEFINICJA REKURENCYJNA (INDUKCYJNA)

- nieformalnie – taka definicja, która odwołuje się do samej siebie
- zwykle chodzi o ciąg $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, dla którego wzór na element a_n wykorzystuje jakieś poprzednie elementy $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ itp.,
- początkowy element (lub kilka początkowych) muszą być zadane konkretnie.

▶ DEFINICJA REKURENCYJNA (INDUKCYJNA)

- nieformalnie – taka definicja, która odwołuje się do samej siebie
- zwykle chodzi o ciąg $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, dla którego wzór na element a_n wykorzystuje jakieś poprzednie elementy $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ itp.,
- początkowy element (lub kilka początkowych) muszą być zadane konkretnie.

$g_0 = (0+1)\cdot(2\cdot 0+3) = 3$

$g_{40} = (40+1)\cdot(2\cdot 40+3) = 41\cdot 83 = \ldots$

◀ **PRZYKŁAD**

Zapisz definicję rekurencyjną dla ciągu $g_0, g_1, g_2, \ldots$, gdzie $g_n = (n+1)(2n+3)$. wzór jawny (zwarty)

W oparciu o definicje „rozwińmy" wyraz g_{n+1}. y g_{n+1}

$$g_{n+1} = ((n+1)+1)(2(n+1)+3) = (n+2)(2n+5) = 2n^2+9n+10$$

Zauważmy, że $g_n = (n+1)(2n+3) = 2n^2+5n+3$, zatem

$$g_{n+1} = 2n^2+9n+10 = 2n^2+5n+3+4n+7 = g_n + 4n + 7.$$

W konsekwencji otrzymujemy, że

$$\begin{cases} g_0 = 3; \\ g_n = g_{n-1} + 4n + 3, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

wzór rekurencyjny coś

$g_{40} = g_{39} + 4\cdot 40 + 3 = (g_{38} + 4\cdot 39 + 3) + 163$

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie: ◀ **PRZYKŁAD**

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_n &= \frac{n+2}{3n} \cdot a_{n-1} \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznacz wzór zwarty (jawny) na n-ty wyraz tego ciągu. Wykaż poprawność uzyskanego wzoru.

Aby odgadnąć wzór, stosujemy tzw. *metodę iteracyjną*, tzn. rozwijamy wzór rekurencyjny do samego końca:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+2}{3n} \cdot a_{n-1} \\ &= \frac{n+2}{3n} \cdot \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot a_{n-2} \\ &= \frac{n+2}{3n} \cdot \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot \frac{n}{3(n-2)} \cdot a_{n-3} \\ &= \frac{n+2}{3n} \cdot \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot \frac{n}{3(n-2)} \cdot \frac{n-1}{3(n-3)} \cdot a_{n-4} \\ &= \dots \\ &= \frac{n+2}{3n} \cdot \frac{n+1}{3(n-1)} \cdot \frac{n}{3(n-2)} \cdot \frac{n-1}{3(n-3)} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{3 \cdot 2} \cdot a_1 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n \cdot \ldots \cdot 4}{3^{n-1} \cdot n!} \cdot a_1 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n \cdot \ldots \cdot 4}{3^{n-1} \cdot n!} \cdot \frac{3!}{3!} \cdot a_1 = \cancel{\frac{(n+2)!}{3^{n-1} \cdot n!}} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \cancel{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n}. \end{aligned}$$

$3 \cdot \cancel{2}$

wzór jawny

wzór: $a_n = \frac{n+2}{3n} \cdot a_{n-1}$

Pozostaje jeszcze wykazać — w oparciu o zasadę indukcji matematycznej — poprawność wzoru

$$a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n}. \quad \longleftarrow P(n)$$

$P(\underline{1})$? $a_1 = \ldots = 2$ TAK

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $a_1 = 2 = \frac{(1+2)(1+1)}{3^1}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n}$. $P(n)$
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$\Downarrow$? $P(n+1)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \overset{\text{rekurencji}}{[\text{wzór}]} = \frac{(n+1)+2}{3(n+1)} \cdot a_n \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = \frac{n+3}{3\cancel{(n+1)}} \cdot \frac{(n+2)\cancel{(n+1)}}{3^n} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)}{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

$P(n+1)$: $\left[a_{n+1} = \frac{((n+1)+2)((n+1)+1)}{3^n} = \frac{(n+3)(n+2)}{3^{n+1}} \right]$

$e_1 = 2$ $\quad e_2 = (2+3)^2 + 5 = 30 \quad e_3 = (30+3)^2+5 = 33^2+5 = 1094 \; \ldots$

$2+5=7 \quad 7|7+ \quad 30+5=35 \quad 7/35+ \quad 1094+5=1099 \quad 7|1099+$

Ciąg (e_n) jest określony rekurencyjnie: ◀ **PRZYKŁAD**

$$e_1 = 2$$
$$e_n = (e_{n-1}+3)^2+5 \text{ dla } n \geq 2.$$

$e_n \bmod 7 = 2$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $7 \mid (e_n + 5)$. $P(n)$

Zauważmy, że własność „$7 \mid (e_n + 5)$" możemy równoważnie zapisać jako „reszta z dzielenia e_n przez 7 wynosi 2". Skorzystajmy teraz z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $e_1 = 2 = 2 \bmod 7$. $P(1)$ $\quad e_1 \bmod 7 = 2$? TAK

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $e_n \bmod 7 = 2$. $P(n)$

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$e_{n+1} \bmod 7 = [\text{wzór}] \overset{\text{rekurencyjny}}{=} [(e_n+3)^2+5] \bmod 7$$
$$= [\text{założenie indukcyjne}] = [(2 \mod 7 + 3)^2 + 5] \bmod 7$$
$$= 30 \bmod 7 = 2 \bmod 7, = 2 \;:)$$

$5^2+5 \bmod 7$

$\Downarrow$ $P(n+1)$

$e_{n+1} \bmod 7 = 2$

co należało wykazać.

$n=1$ $\quad 4^1+6\cdot 1-10=0$ $\quad 9|0+$

$n=2$ $\quad 4^2+6\cdot 2-10=16+12-10=18$ $\quad 9|18+$

$n=3$ $\quad 4^3+6\cdot 3-10=64+18-10=72$ $\quad 9|72+$ ...

W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ zachodzi $9 \mid (4^n + 6n - 10)$. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą naturalną. Niech $i_n = 4^n + 6n - 10$. Określmy nasz predykat $P(n)$ jako: „Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ liczba i_n jest podzielna przez 9" (czyli $i_n \bmod 9 = 0$).

Aby wykorzystać teraz indukcję matematyczną, potrzebujemy związać wzór na i_{n+1} z wyrazem i_n (definicja rekurencyjna). Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} i_{n+1} &= 4^{n+1} + 6(n+1) - 10 = 4 \cdot 4^n + 6n - 4 \\ &= 4 \cdot \underbrace{(4^n + 6n - 10)}_{i_n} - 18n + 36 = 4 \cdot i_n - 9 \cdot (2n+4). \end{aligned}$$

?

A zatem:

1. Krok bazowy: $n = 1$. Mamy $i_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 - 10 = 0$, a zatem $i_1 \bmod 9 = 0$. $\quad P(1)$ +
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $i_n \bmod 9 = 0$. $\quad P(n)$
3. **Krok indukcyjny.** Rozważmy $n+1$ (≥ 2). $\quad \Downarrow$

$$i_{n+1} \bmod 9 = \text{[wzór]} = \ldots$$

$P(n+1)$

$9|i_n$ z zał. ind. $\qquad 4\cdot i_n - \underbrace{9\cdot(2n+4)}_{\text{podzielne przez } 9} \qquad 9|i_{n+1}$

$n=1 \quad k=0$ $\qquad$ $n=2$ $\qquad$ $n=3 \quad k=1$ $\qquad$ $n=4$

$3^1+1=4 \quad 4|4$ $\qquad$ $3^2+1=10 \quad 4\nmid 10$ $\qquad$ $3^3+1=28 \quad 4|28$ $\qquad$ $3^4+1=82 \quad 4\nmid 82$ ...

$3\cdot 9^0+1=3\cdot 1+1=4$ $\qquad$ $3\cdot 9^1+1=28$

W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, **◀ PRZYKŁAD**
że jeśli n jest dowolną dodatnią liczbą nieparzystą, wówczas zachodzi $4 \mid (3^n+1)$.

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą nieparzystą, tzn. $n = 2k+1$, $k \geq 0$. Niech $l_k = 3^n+1 = 3^{2k+1}+1 = 3\cdot 9^k + 1$. Określmy nasz predykat $P(k)$ jako: „Dla dowolnej liczby naturalnej liczba l_k jest podzielna przez 4" (czyli $l_k \bmod 4 = 0$).

Aby wykorzystać teraz indukcję matematyczną, potrzebujemy związać wzór na l_{k+1} z wyrazem l_k (definicja rekurencyjna). Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} l_{k+1} &= 3\cdot 9k+1+1 = 27\cdot 9^k+1 \\ &= 9\cdot 3\cdot 9^k+1 = 9\cdot \underbrace{(3\cdot 9^k+1)}_{l_k} - 8 = 9\cdot l_k - 8. \end{aligned}$$

... A zatem:

1. Krok bazowy: $k=0$. Mamy $l_0 = 3\cdot 9^0+1 = 4$, a zatem $l_0 \bmod 4 = 0$. $P(0)$ TAK
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $k \geq 0$ zachodzi $l_k \bmod 4 = 0$. $P(k)$ $\Downarrow$
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $k+1$ (≥ 1).

$$l_{k+1} = \underset{\text{rekurencji}}{[\text{wzór}]} = \ldots\ 9\cdot l_k - 8$$

z zał. ind. $4|l_k$ $\qquad$ $4|8$:-) ... $\qquad$ $P(k+1)$

Ciąg (F_n) jest określony rekurencyjnie: **◀ PRZYKŁAD**

$F_3 = 1+1 = 2$ $F_4 = 2+1 = 3$ $F_5 = 3+2 = 5$ ....

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geq 1. \end{aligned}$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi $5 \mid F_{5n}$.

Skorzystajmy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$.

$F_5 = F_4 + F_3 = (F_3 + F_2) + (F_2 + F_1) = (F_2 + F_1) + F_2 + F_1 + F_1 = 5$, a zatem $5 \mid F_1$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $5 \mid F_{5n}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} F_{5(n+1)} &= [\text{wzór}] = F_{5n+4} + F_{5n+3} \\ &= [\text{wzór}] = (F_{5n+3} + F_{5n+2}) + (F_{5n+2} + F_{5n+1}) = F_{5n+3} + 2F_{5n+2} + F_{5n+1} \\ &= [\text{wzór}] = (F_{5n+2} + F_{5n+1}) + 2(F_{5n+1} + F_{5n}) + F_{5n+1} = F_{5n+2} + 4F_{5n+1} + 2F_{5n} \\ &= [\text{wzór}] = (F_{5n+1} + F_{5n}) + 4F_{5n+1} + 2F_{5n} = 5F_{5n+1} + 3F_{5n}. \end{aligned}$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że F_{5n} jest podzielna przez 5. Jako że $5F_{5n+1}$ jest także podzielne przez 5, a zatem suma $5F_{5n+1} + 3F_{5n}$ jest także liczbą podzielną przez 5 $(n \geq 1)$.

jest podz. przez 5

◀ **PRZYKŁAD**

Dany jest ciąg (p_n) określony rekurencyjnie

$$p_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad p_{n+1} = \frac{1}{p_n + 1} \text{ dla } n \geq 1.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $p_n \geq \frac{1}{2}$.

$P(n)$

Policzmy kilka początkowych wyrazów:

$p_1 = 1 = \frac{1}{1}$;

$p_2 = \frac{1}{p_1+1} = \frac{1}{2}$

$p_3 = \frac{1}{p_2+1} = \frac{2}{3}$

$p_4 = \frac{1}{p_3+1} = \frac{3}{5}$

$p_5 = \frac{1}{p_4+1} = \frac{5}{8}$

$p_6 = \frac{1}{p_5+1} = \frac{8}{13}$

$p_7 = \frac{13}{21}$

$p_8 = \dots$

Liczniki: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

Mianowniki: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Licznik ≤ Mianownik.

① $p_n \geq \frac{1}{2}$

② $p_n \leq 1$

$p_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

↑ $Q(n)$

(silniejsze od $P(n)$)

Zatem możemy dodatkowo przypuszczać, że zachodzi zawsze także $p_n \leq 1$. W konsekwencji nasz predykat brzmi teraz „$p_n \in [\frac{1}{2}, 1]$”.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $p_1 =$[definicja]$= 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$Q(1)$ TAK ? $p_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $p_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$Q(n)$

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

Z definicji mamy, że $p_{n+1} = \frac{1}{p_n+1}$, natomiast z założenia indukcyjnego zachodzi $p_n \in [\frac{1}{2}, 1]$. Skoro $p_n \geq \frac{1}{2}$, to

największa wartość dla $p_n = \frac{1}{2}$

$$p_{n+1} = \frac{1}{p_n + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} \leq 1.$$

Z drugiej strony, skoro $p_n \leq 1$, wówczas

$$p_{n+1} = \frac{1}{p_n + 1} \geq \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

minimum dla $p_n = 1$

co kończy właściwy dowód.

$Q(n+1)$: $p_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1]$

Naturalnym jednak jest — tak przy okazji — pytanie o zwarty (jawny) wzór na kolejne wyrazy ciągu (p_n). Zauważmy, że liczniki kolejnych wyrazów tworzą ciąg $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, podczas gdy mianowniki — $1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$. Pierwszy ciąg to kolejne, począwszy od wyrazu drugiego, liczby *ciągu Fibonachiego* (F_n), a drugi — kolejne, począwszy od wyrazu trzeciego, liczby tegoż samego ciągu Fibonachiego. Przypomnijmy, że

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{oraz } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geq 2,$$

natomiast wzór jawny na F_n (wzór Bineta) to:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Zatem wzór jawny dla p_n jest następujący $(n \geq 1)$:

$$p_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} = 2 \cdot \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}} .$$

Wzór ten jest trudny do wykorzystania tutaj (dla treści zadania).

Rozważmy *równanie rekurencyjne liniowe jednorodne* postaci

$$\begin{aligned} a_1 &= A \\ a_2 &= B \\ a_n &= Ca_{n-1} + Da_{n-2} \end{aligned}$$

gdzie $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Aby otrzymać wzór jawny na a_n, „zgadujemy”, że rozwiązaniem *ogólnym* jest $a_n^\bullet = x^n$. Podstawiając teraz to rozwiązanie do równania rekurencyjnego, otrzymujemy, że

$$x^n = Cx^{n-1} + Dx^{n-2}.$$

Podzielenie obu stron przez x^{n-2} daje

$$x^2 = Cx + D,$$

czyli

$$x^2 - Cx - D = 0.$$

Otrzymane równanie nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania rekurencyjnego, a w tym przypadku jest to równanie kwadratowe. Jeżeli równanie to ma dwa rozwiązania, przyjmijmy x_1 oraz x_2, wówczas rozwiązaniem *szczegółowym*

$$a_n = Ex_1^n + Fx_2^n,$$

jeżeli natomiast równanie to ma jeden pierwiatek podwójny, przyjmijmy x_3, wówczas

$$a_n = (E + Fn) \cdot x_3^n,$$

gdzie E, F są pewnymi stałymi, których wartość możemy ostatecznie wyznaczyć w oparciu o fakt, że $a_1 = A$ oraz $a_2 = B$.

Rozwiąż równanie rekurencyjne postaci $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ z warunkami poczatkowymi $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 6$. ◀ **PRZYKŁAD**

Dla tak określonej rekurencji (równianie rekurencyjne liniowe jednorodne) jej równanie charakterystyczne ma postać

$$x^2 = 6x - 9, \text{ czyli } x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0.$$

Równanie to posiada jeden pierwiastek podwójny $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$a_n = (E + Fn) \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 6$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 1 &= (E + F \cdot 0) \cdot 3^0 \\ 6 &= (E + F \cdot 1) \cdot 3^1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = 1$ oraz $F = 1$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że $a_n = (n+1) \cdot 3^n$.

Powyższe rozwiązanie można sprawdzić korzystając z indukcji matematycznej. Oczywiście wzór jest prawdziwy dla $n = 0$ oraz $n = 1$. Stosujemy następnie *indukcję zupełną* (bo odwołujemy się do dwóch wczesniejszych wyrazów, a nie tylko ostatniego).

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_n - 9a_{n-1} = [\text{założenie indukcyjne}] = \\ &= 6 \cdot (n+1) \cdot 3^n - 9 \cdot ((n-1)+1) \cdot 3^{n-1} = ((n+1)+1) \cdot 3^{n+1} \end{aligned},$$

co należało wykazać.

Przyjmijmy, że Student rozwiązujący pewien problem jest **◀ PRZYKŁAD** na n-tym etapie, jeżeli do rozwiązania problemu pozostało mu n ($n > 1$) kroków. Na każdym etapie ma on pięć możliwości. Dwie z nich prowadzą go z n-tego etapu do $(n-1)$-go etapu, a pozostałe trzy prowadzą go bezpośrednio do $(n-2)$-go etapu. Niech l_n oznacza liczbę sposobów rozwiązania problemu zaczynając od n-tego etapu. Przyjmując, że $l_1 = 5$ oraz $l_2 = 13$, wyznacz wzór jawny na l_n.

Z warunków zadania otrzymujemy równianie rekurencyjne liniowe jednorodne postaci

$$l_l = 2l_{n-1} + 3l_{n-2}.$$

Jego równanie charakterystyczne ma postać

$$x^2 = 2x + 3, \text{ czyli } x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0.$$

Równanie to posiada zatem dwa pierwiastki: $x = -1$ oraz $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$a_n = E \cdot (-1)^n + F \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $a_1 = 5$ oraz $a_2 = 13$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 5 &= E \cdot (-1)^1 + F \cdot 3^1 \\ 13 &= E \cdot (-1)^2 + F \cdot 3^2 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = -\frac{1}{2}$ oraz $F = \frac{3}{2}$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że

$$l_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{2}.$$

Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite. ◀ **PRZYKŁAD**

```
x := 1;
dopóki (1 < 2) wykonuj {
    wypisz(x);
    x := x + √(12(x − 1)) + 3;
    }
```

Na kolejno wypisywane liczby możemy spojrzeć jak na kolejne liczby ciągu (x_n), który zadany jest następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + \sqrt{12(x_{n-1} - 1)} + 3 \text{ dla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Wyznaczmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1 + \sqrt{12 \cdot (1 - 1)} + 3 = 4$

$x_3 = 4 + \sqrt{12 \cdot (4 - 1)} + 3 = 4 + \sqrt{36} + 3 = 13$

$x_4 = 13 + \sqrt{12 \cdot (13 - 1)} + 3 =$ [redacted] $+ \sqrt{144} + 3 =$ [redacted] 28

13

$x_5 = \ldots$

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{12(x_n - 1)}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że

$$\sqrt{12(x_n - 1)} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite. ◀ **PRZYKŁAD**

$x := 1;$
dopóki $(1 < 2)$ **wykonuj** {
  wypisz(x);
  $x := x + \sqrt{12(x-1)} + 3;$
  }

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{12(x_n - 1)}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że

$$\sqrt{12(x_n - 1)} \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

- Jako że $\sqrt{12(x_n - 1)} = 2\sqrt{3(x_n - 1)}$, zatem liczba $\sqrt{12(x_n - 1)}$ będzie liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zachodzić $x_n = 3j_n^2 + 1$ dla jakiejś całkowitej liczby j_n.
- Zachodzi wówczas, że $\sqrt{12(x_n - 1)} = 6j_n$.
- Implikuje to także, że x_n jest liczbą całkowitą — a zatem nasz predykat $P(n)$ jest postaci:
$$x_n = 3j_n^2 + 1 \text{ dla jakiejś całkowitej liczby } j_n.$$

Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite. ◀ **PRZYKŁAD**

```
x := 1;
dopóki (1 < 2) wykonuj {
    wypisz(x);
    x := x + √(12(x − 1)) + 3;
    }
```

$x_1 = 1 = 3 \cdot 0^2 + \underline{1}$

▶ Nasz predykat $P(n)$ jest postaci:

$$x_n = 3j_n^2 + 1 \text{ dla jakiejś całkowitej liczby } j_n.$$

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, $x_1 = 3 \cdot 0 + 1$, zatem $j_1 = 0$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi, że $x_n = 3j_n^2 + 1$ dla jakiejś całkowitej liczby j_n.

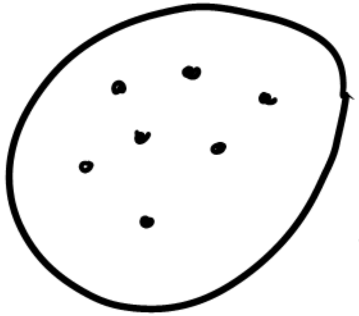
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \text{[wzór]} = x_n + \sqrt{12(x_n - 1)} + 3 \\ &= \text{[założenie indukcyjne]} = (3j_n^2 + 1) + \sqrt{12\left((3j_n^2 + 1) - 1\right)} + 3 \\ &= 3j_n^2 + 6j_n + 4 = 3(j_n^2 + 2j_n + 1) + 1 = 3(j_n + 1)^2 + 1 = 3j_{n+1}^2 + 1, \end{aligned}$$

gdzie $j_{n+1} = j_n + 1$ jest liczbą naturalną (bo taką jest j_n), co należało wykazać.

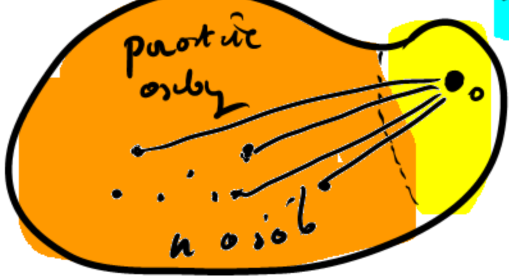
Wykaż za pomocą indukcji matematycznej, że w grupie n osób można utworzyć $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych delegacji 2-osobowych. ◀ **PRZYKŁAD**

2°



$\frac{n(n-1)}{2}$ par,

3°



n+1 osób

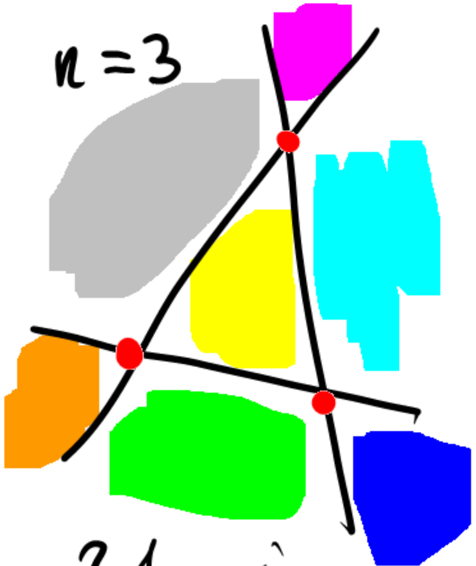
$\frac{n(n-1)}{2}$ + dodatkowe n par

1. Krok bazowy: $n = 1$. Wówczas w grupie jednoosobowej nie ma możliwości wyboru delegacji – zachodzi $0 = \frac{1(1-1)}{2}$. P(1) TAK
2. Założenie indukcyjne: w grupie n-osobowej można utworzyć różnych $\frac{n(n-1)}{2}$ delegacji. $P(n)$ $\Downarrow$
3. Krok indukcyjny. Niech G będzie dowolną $(n+1)$-osobową grupą. Niech o będzie dowolną osobą z grupy G. Usuńmy tę osobę z grupy.

- Otrzymana grupa G' liczy n osób, zatem – z założenia indukcyjnego – posiada $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych delegacji. $P(n+1)$
- Usunięta osoba o mogła utworzyć w G dokładnie n różnych par (tych nieistniejących w G').

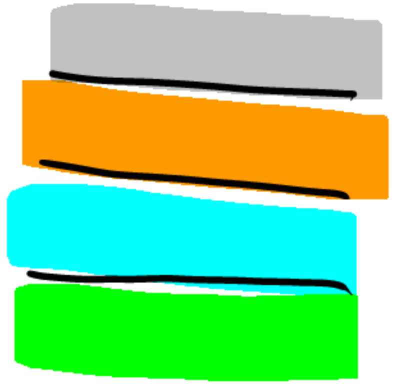
A zatem łączna liczba różnych delegacji w grupie G wynosi $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2}$, co należało wykazać.

$n = 3$

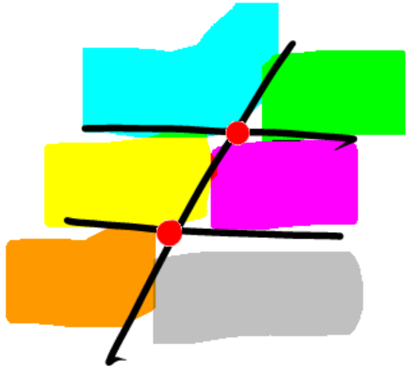


7 obszarów

6 obszarów



4 obszary

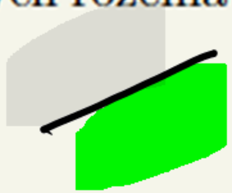


6 obszarów

$(n^2+n+2)/2 = \frac{9+3+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że n dowolnych prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dzieli tą płaszczyznę na nie więcej niż $(n^2 + n + 2)/2$ spójnych obszarów. ◀ **PRZYKŁAD**

Niech $x_n = (n^2+n+2)/2$. Zdefiniujemy predykat $P(n)$: n prostych rozcina płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na co najwyżej x_n spójnych obszarów.



$n=1$

obszarów $= 2$

$\frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$:)

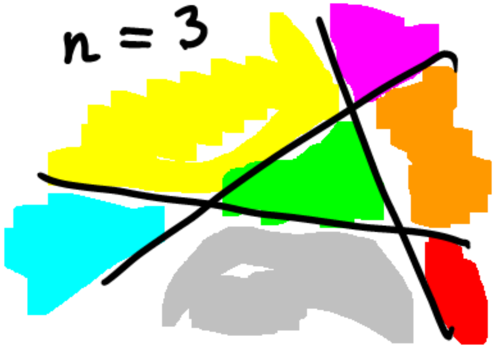
$P(1)$ 1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, oczywiste – mamy dwa obszary.

$P(n)$ 2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $P(n)$.

$\Downarrow$ 3. Krok indukcyjny. Rozważmy dowolnych $n + 1$ (≥ 2) prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

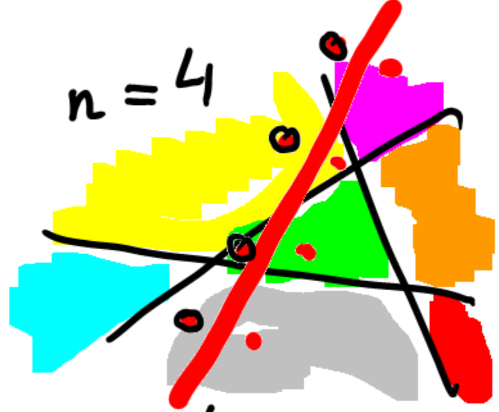
$P(n+1)$

$n = 3$



$L_3 = 7$

$n = 4$



L

$L_4 \leq L_3 + 4$

jeśli usunę prost L to dostaję co najwyżej L_3

$$L_{n+1} \leq L_n + n + 1$$

Rozważmy dowolną z tych prostych i usuńmy ją (niech ta prosta nazywa się L).

- Otrzymujemy płaszczyznę rozciętą n prostymi i z założenia indukcyjnego te n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż $x_n = (n^2 + n + 2)/2$ spójnych obszarów.

  $\leq (n^2 + n + 2)/2 + n + 1 = \ldots$

- Zauważmy teraz, że nasza prosta L przecina pozostałe n prostych w co najwyżej n punktach (w mniej niż n, gdy prosta L przecina pozostałe proste w ich punktach przecięcia lub gdy prosta L jest równoległa do którejś/kilku z pozostałych n prostych).

- A zatem L rozcina co najwyżej $n + 1$ obszarów utworzonych przez podział pozostałymi n prostymi (bez prostej L).

W konsekwencji liczba x_{n+1} spójnych rozłącznych obszarów rozciętych przez wszystkie $n+1$ prostych (łącznie z L) jest nie większa od liczby spójnych rozłącznych obszarów rozciętych przez n prostych (bez L), powiększonej o $n+1$, a co za tym idzie:

$$
\begin{aligned}
\underline{x_{n+1}} &\leq x_n + (n+1) \leq \tfrac{n^2+n+2}{2} + (n+1) \\
&= \tfrac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \tfrac{n^2+2n+1+n+1+2}{2} = \tfrac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2},
\end{aligned}
$$

co należało wykazać.

Poniżej podany jest pseudo-kod algorytmu.

```
const k = ...;
type T = array[1...k] of integers;
for i = 1 to k - 1 do
    if T[i] < T[i+1] then "zamień T[i] z T[i + 1]"
writeln(T[k]);
```

Wykaż, że powyższy algorytm wypisuje minimalną wartość tablicy T.

$k = 4$ $\quad T = [2, 8, 1, 5]$

$i = 1 \dots 3$

$i=0$: $T = [2, 8, 1, 5]$ $\quad i=1$: $T[1] \overset{?}{<} T[2]$ $\quad 2 < 8$ TAK

$i=1$: $T = [8, 2, 1, 5]$ $\quad i=2$: $T[2] \overset{?}{<} T[3]$ $\quad 2 \not< 1$ NIE

$i=2$: $T = [8, 2, 1, 5]$ $\quad i=3$: $T[3] \overset{?}{<} T[4]$ $\quad 1 < 5$ TAK

$i=3$: $T = [8, 2, 5, 1]$

NIEZMIENNIK PĘTLI

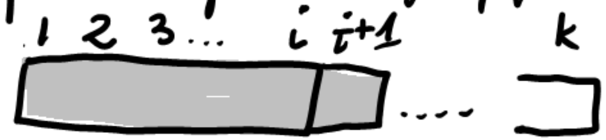
po i-tym obiegu pętli

najmniejszy element podtablicy $T[1 \dots i+1]$

1

NIEZMIENNIK PĘTLI

po i-tym obiegu pętli



↑ najmniejszy element podtablicy $T[1\ldots i+1]$

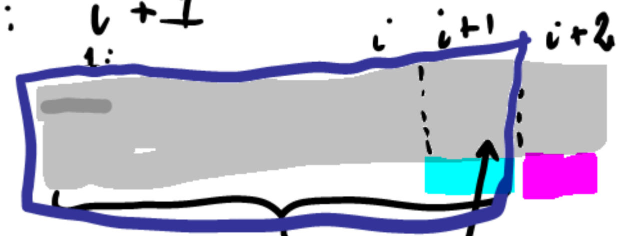
1° Krok bazowy: $i=0$ (nic się jeszcze nie wykonało)

dla podtablicy 1-elementowej min to ten element !

2° Założenie indukcyjne: $i \geq 0$. Teza prawdziwa.

tu jest najmniejszy element podtablicy $T[1\ldots i+1]$

3° Krok indukcyjny: $i+1$



? czy tu jest najmniejszy element podtablicy $T[1\ldots i+2]$

przed wejściem do pętli: z założenia:

tu jest najmniejszy element podtablicy $T[1\ldots i+1]$

$$\min(T[1\ldots, i+2]) = \min(\underbrace{T[1\ldots i+1]}_{\min}, T[i+2]) :$$

algorytm, jeśli $\min T[1\ldots i+1] < T[i+2]$, zamieni je miejscami co daje $\min(T[1\ldots i+2]) = T[i+2]$