ZESTAW 13

ELEMENTY PRAWDOPODOBIEŃSTWA

◄ **PRZYKŁAD**

Przeprowadzamy serię kolejnych doświadczeń tak, że w wyniku każdego z nich może zajść zdarzenie A albo zdarzenie przeciwne $\overline{A}$. Oznaczmy zajście zdarzenia A w n-tym doświadczeniu przez A_n i zdarzenia doń przeciwnego przez $\overline{A_n}$, oraz odpowiednio przez p_n prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A_n i przez q_n odpowiednie prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego, tzn. $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(\overline{A_n}) = 1 - p_n$.

W przypadku zajścia zdarzenia A w n-tym doświadczeniu, prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w kolejnym $(n + 1)$-doświadczeniu równa się a. W przypadku zaś, gdy nie zajdzie zdarzenie A w n-tym doświadczeniu, prawdopodobieństwo jego zajścia w $(n+1)$-szym doświadczeniu niech równa się b. Innymi słowy:

$$P(A_{n+1}|A_n) = a \text{ oraz } P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = b.$$

W tak postawionym zagadnieniu oblicz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w $(n + 1)$-szym doświadczeniu znając prawdopodobieństwa p_1, a, b.

Zdarzenie A_{n+1} polega na zajściu jednego z dwóch zdarzeń wykluczających się: $A_n \cap A_{n+1}$ i $\overline{A_n} \cap A_{n+1}$, a zatem $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (\overline{A_n} \cap A_{n+1})$. Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy, że że

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \cdot (A_{n+1}|A_n) + P(\overline{A_n}) \cdot P(A_{n+1}|\overline{A_n}).$$

Po wprowadzeniu podanych oznaczeń zachodzi zatem $p_{n+1} = p_n \cdot a + q_n \cdot b$. Wyznaczając p_{n+1} (patrz np. `https://www.wolframalpha.com/`) otrzymujemy, że

$$p_{n+1} = (p_1 - \frac{b}{1-c}) \cdot c^n + \frac{b}{1-c},$$

gdzie $c = a - b$.

Zauważmy, że uzyskany tutaj ciąg prawdopodobieństw jest najprostszym przypadkiem tzw. „łańcucha Markowa”. Przy przejściu granicznym, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \frac{b}{1-a+b}.$$

Ciekawym jest fakt, że p nie zależy od początkowej wartości p_1.

ZADANIE 13.1. Niech prawdopodobieństwo tego, że po wyjeździe z domu napotkamy na pierwszym skrzyżowaniu zielony sygnał świetlny, będzie równe $\frac{1}{2}$. Sygnalizacja jest tak ustawiona, że w przypadku zatrzymania się na dowolnym skrzyżowaniu przy świetle czerwonym prawdopodobieństwo tego, że na następnym skrzyżowaniu zastaniemy światło zielone jest równe $\frac{95}{100}$, natomiast prawdopodobieństwo tego, że jeśli na dowolnym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone, to i na następnym będziemy mieli światło zielone, jest równe $\frac{1}{10}$. W oparciu o powyższy przykład oblicz:

a) prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z garażu na trzecim skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone;
b) prawdopodobieństwo graniczne, tj. $\lim_{n\to\infty} p_{n+1}$, gdzie p_k oznacza prawdopodobieństwo, że po wyjeździe z garażu na k-tym skrzyżowaniu będziemy mieli światło zielone.

ZADANIE 13.2. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

Oblicz $P(X \text{ jest parzyste})$, $P(X < 3)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$, wariancję $\mathrm{Var}[X]$ oraz $P(X \geq \mathbb{E}[X])$.

ZADANIE 13.3. Z urny zawierającej pięć kul z numerami $1, 2, 3, 4, 5$ losujemy ze zwracaniem dwie kule. Niech zmienna losowa X oznacza sumę numerów obu kul. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej X, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[X]$.

ZADANIE 13.4. Z urny zawierającej trzy monety pięciozłotowe i dwie monety dwuzłotowe losujemy dwie monety (bez zwracania). Niech zmienna losowa Y oznacza sumę nominałów wylosowanych monet. Obliczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej Y, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[Y]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[Y]$.

ZADANIE 13.5. Z urny zawierającej dwie monety pięciozłotowe, dwie monety dwuzłotowe i dwie monety jednozłotowe losujemy jedną monetę i jeśli jest to złotówka, to losujemy jeszcze jedną. Niech zmienna losowa Z oznacza sumę nominałów wylosowanych monet. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej losowej Z, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[Z]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[Z]$.

ZADANIE 13.6. Z urny zawierającej cztery białe i trzy czarne kule losujemy bez zwracania dwie kule. Niech zmienna losowa X oznacza, ile wśród wylosowanych kul jest kul białych. Podaj gęstość rozkładu zmiennej losowej X, jej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$ oraz wariancję $\mathrm{Var}[X]$.

ZADANIE 13.7. Niech zmienna losowa X posiada rozkład dwumianowy z długością serii $n = 2000$ oraz prawdopodobieństwem sukcesu $p = \frac{1}{2}$. Oszacuj $P(X \geq 1500)$ w oparciu o nierówność Markowa, Czebyszewa i Chernoffa.

ZADANIE 13.8. Oszacuj za pomocą nierówności Markowa i Czebyszewa prawdopodobieństwo tego, że w 400 rzutach uczciwą monetą reszka wypadnie mniej niż 300 razy.

Wskazówka. Skorzystaj z własności, że suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych wynosi 1.

ZADANIE 13.9. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[X]$, wariancję $\mathrm{Var}[X]$ oraz $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1)$. Porównaj ostatnią liczbę z wartością otrzymaną z nierówności Czebyszewa.

Odpowiedzi do zadań

13.1. Przyjmując $p_1 = 0.5$, $a = 0.1$ oraz $b = 0.95$ i korzystając ze wzorów (patrz przykład przed zadaniem):

$$p_{n+1} = (p_1 - \frac{b}{1-c}) \cdot c^n + \frac{b}{1-c},$$

gdzie $c = a - b$, oraz

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \frac{b}{1-a+b},$$

otrzymujemy:

a) $p_3 = (0.5 - \frac{0.95}{1-(0.1-0.95)}) \cdot (0.1-0.95)^2 + \frac{0.95}{1-(0.1-0.95)} = 0.6425$;

b) w granicy liczby skrzyżowań zbiegającej do nieskończoności: $p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} \approx 0.5135$.

13.2.

$P(X \text{ jest parzyste}) = \frac{5}{16}$.

$P(X < 3) = \frac{3}{4}$.

$\mathbb{E}[X] = 1\frac{15}{16}$.

$\mathrm{Var}[X] = 5\frac{3}{16} - (1\frac{15}{16})^2 = \frac{367}{256} = 1\frac{111}{256}$.

$P(X \geq \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{2}$.

13.3. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[X] = 6$ oraz $\mathrm{Var}[X] = 4$.

13.4. Zmienna losowa Y posiada następujący rozkład:

x	4	7	10
$P(Y=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[Y] = 7\frac{3}{5}$ oraz oraz $\mathrm{Var}[Y] = 2\frac{6}{25}$.

13.5. Zmienna losowa Z posiada następujący rozkład:

z	2	3	5	6
$P(Z=z)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[Z] = 3\frac{2}{3}$ oraz $\mathrm{Var}[Z] = 2\frac{22}{45}$.

13.6. Zmienna losowa X posiada następujący rozkład:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

.

Otrzymujemy $\mathbb{E}[X] = 1\frac{1}{7}$ oraz oraz $\mathrm{Var}[X] = \frac{20}{49}$.

13.7.

1) Z nierówności Markowa: $P(X \geq 1500) \leq \frac{2}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X \geq 1500) \leq 0.001$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X \geq 1500) \leq \min\{e^{-250/3}, e^{-125}\} = e^{-125}$.

13.8. Korzystamy z własności, że $P(X < 300) = 1 - P(X \geq 300)$.

1) Z nierówności Markowa: $P(X \geq 300) \leq \frac{2}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X \geq 300) \leq 0.01$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X \geq 300) \leq \min\{e^{-50/3}, e^{-25}\} = e^{-25}$.

W konsekwencji

1) Z nierówności Markowa: $P(X < 300) \geq \frac{1}{3}$.
2) Z nierówności Czebyszewa: $P(X < 300) \geq 0.99$.
3) Z nierówności Chernoffa: $P(X < 300) \geq \frac{e^{25}-1}{e^{25}}$.

13.9.

$\mathbb{E}[X] = 0$ oraz $\mathrm{Var}[X] = 1$.

$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

Z nierówności Czebyszewa $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) \leq 1$.