ZESTAW 11

ELEMENTY TEORII GRAFÓW

— DEFINICJE I WŁASNOŚCI —

ZADANIE 11.1. Które z następujących ciągów są graficzne?

a) $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$.
b) $(7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1)$.
c) $(6, 6, 5, 5, 2, 2, 2, 2)$.
d) $(6, 6, 5, 5, 3, 3, 3, 3)$.

Dla ciągów, które są grafowe, narysuj odpowiednie grafy (proste).

ZADANIE 11.2. Wykaż (np. przez odpowiedni rysunek), że:

a) dla dowolnego parzystego $n \geq 4$ istnieje n-wierzchołkowy graf, których wszystkie stopnie wynoszą 3;

b) dla dowolnego nieparzystego $n \geq 5$ istnieje graf o $n + 1$ wierzchołkach, spośród których dokładnie n jest stopnia 3;

c) dla dowolnego $n \geq 5$ istnieje graf o n wierzchołkach, których wszystkie stopnie wynoszą 4.

ZADANIE 11.3.

a) Znajdź/narysuj graf o sześciu wierzchołkach i siedmiu krawędziach, który nie posiada podgrafu będącego cyklem długości 4 (ozn. C_4).

b) Znajdź/narysuj graf o sześciu wierzchołkach i dwunastu krawędziach, który nie posiada podgrafu będącego *grafem pełnym* o czterech wierzchołkach (ozn. K_4).

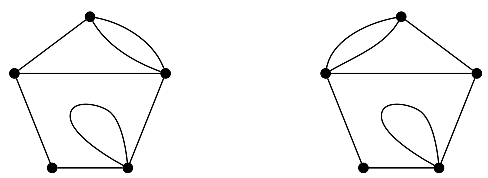
ZADANIE 11.4. Niech $k \geq 0$. Ustal, dla jakich wartości n istnieje chociaż jeden n-wierzchołkowy graf prosty posiadający dokładnie:

a) k wierzchołków izolowanych;
b) k wierzchołków wiszących (liści).

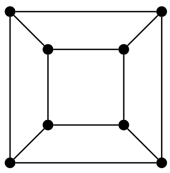
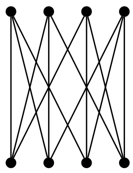
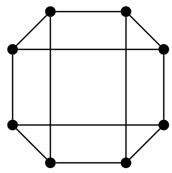
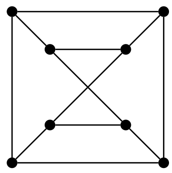
ZADANIE 11.5. Niech n będzie liczbą naturalną, a m nieujemną liczbą całkowitą. Wyznacz stopień n-wierzchołkowego grafu regularnego o m krawędziach (funkcja od argumentów n i m).

ZADANIE 11.6. Narysuj dwa najmniejsze (w sensie liczby wierzchołków i krawędzi) nieizomorficzne grafy o takiej samej liczbie wierzchołków i krawędzi.

ZADANIE 11.7. Wykaż, że poniższe multigrafy nie są izomorficzne.



ZADANIE 11.8. Które z poniższych grafów (b)-(d) nie są izomorficzne z grafem (a)? Uzasadnij odpowiedź.

a)  b)  c)  d) 

ZADANIE 11.9. Znajdź/narysuj dwa nieizomorficzne drzewa o tym samym ciągu grafowym.

ZADANIE 11.10. Niech T będzie drzewem, którego wierzchołki są wyłącznie stopnia 3 lub 1. Jeśli T ma dziesięć wierzchołków stopnia 3, to ile wówczas ma liści?

ZADANIE 11.11. W drzewie T średnia stopni wierzchołków jest równa 1.99. Ile krawędzi ma T?

ZADANIE 11.12. Ustal, dla jakich wartości n graf pełny K_n posiada:

a) cykl Eulera;
b) cykl Hamiltona.

ZADANIE 11.13. Ustal, dla jakich wartości n i m dwudzielny graf pełny $K_{m,n}$ posiada:

a) cykl Eulera;
b) cykl Hamiltona.

Czy dwudzielny graf G o nieparzystej liczbie wierzchołków może być grafem hamiltonowskim?

ZADANIE 11.14. Ustal, dla jakich wartości n graf pełny K_n z usuniętą jedną krawędzią posiada:

a) cykl Eulera;
b) łańcuch Eulera;
c) cykl Hamiltona;
d) ścieżkę Hamiltona.

Odpowiedzi do zadań

11.4.

a) $n = k$ oraz $n \geq k + 2$.

b) k parzyste: $n \geq k$;
$k = 1$: $n \geq 4$;
$k \geq 3$ nieparzyste: $n \geq k + 1$.

11.6. Z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy, że $\sum_{v \in V} \deg(v) = nr = 2m$. A zatem $r = \frac{2m}{n}$.

11.8. Załóżmy, że grafy te są izomorficzne. Jako że w każdym z grafów istnieje dokładnie jedna pętla, izomorfizm musi przekształcać odpowiednie te wierzchołki w siebie — oznaczmy je przez a_1 (w grafie pierwszym) oraz a_2 (w grafie drugim). Następnie, skoro wiemy już, że w pierwszym grafie wierzchołek a_1 musi odpowiadać wierzchołkowi a_2 w grafie drugim, to izomorfizm musi zachować własności ich sąsiadów, a w szczególności także ich stopnie. Ale a_1 jest sąsiedni do dwóch wierzchołków stopnia 2 oraz 4, podczas gdy a_2 jest sąsiedni do dwóch wierzchołków stopnia 2 oraz 3. A zatem niemożliwym jest takie przypisanie sobie tych wierzchołków, aby zachować odpowiedniość pomiędzy ich stopniami. Otrzymujemy tym samym sprzeczność z założeniem, że grafy są izomorficzne.

11.9. (b) i (c) tak; (d) nie, bo graf ten posiada nieparzysty cykl, których brak w (a), a izomorfizm zachowuje długości cykli.

11.11. Z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy, że $10 \cdot 3 + l \cdot 1 = 2m$, gdzie l jest liczbą liści. Z drugiej strony, jako że T jest drzewem, zachodzi $2m = 2(n-1) = 2n-2 = 2 \cdot (10+l)-2$. Tym samym otrzymujemy, że $l = 12$.

11.12. Z treści oraz z lematu o uściskach dłoni otrzymujemy, że $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v) = \frac{2m}{n} = \frac{2(n-1)}{n} = 1.99$. Tym samym, po przekształceniach, otrzymujemy, że $n = 200$, a zatem $m = 199$.

11.13.

a) $n \geq 1$ nieparzyste.
b) $n \geq 3$.

11.14.

a) n i m dodatnie i parzyste.
b) $n = m$.

NIE. W dowolnym grafie o nieparzystej liczbie wierzchołków cykl Hamiltona, o ile istnieje, jest nieparzystej długości. Natomiast w dowolnym grafie dwudzielnym każdy cykl jest parzystej długości — brak jest cykli nieparzystej długości. Zatem w grafie dwudzielnym o nieparzystej liczbie wierzchołków również brak jest cykli nieparzystej długości, zatem tym bardziej cykli Hamiltona.

11.15.

a) Tylko dla $n = 1$.
b) $n \geq 1$ nieparzyste oraz $n = 4$.
c) $n \geq 4$.
d) $n \geq 1$.