ZESTAW 7

INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz REKURENCJA

ZADANIE 7.1. Niech p_n będzie liczbą podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste zbiory. Znajdź zależność rekurencyjną dla p_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podziałów (sprawdź rozwiązanie korzystając np. z `https://www.wolframalpha.com`).

ZADANIE 7.2. Niech s_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, wliczając zbiór pusty, które nie zawierają sąsiednich liczb. Znajdź zależność rekurencyjną dla s_n i na jej podstawie wyznacz wzór na liczbę takich podzbiorów (sprawdź rozwiązanie korzystając np. z `https://www.wolframalpha.com`).

ZADANIE 7.3. Niech X będzie zbiorem k-elementowych ciągów binarnych. Mówimy, że dwa ciągi $c_1, c_2 \in G$ tworzą *parę*, jeśli c_1 oraz c_2 różnią się dokładnie jednym bitem. Uzasadnij za pomocą indukcji matematycznej, że liczba par w zbiorze X wynosi $k2^{k-1}$.

ZADANIE 7.4. Funkcja Ackermanna określona jest następująco ($i, j, k \geq 1$, naturalne):

$$\begin{cases} A(1,j,k) = j + k; \\ A(i+1,j,1) = j, \ i \geq 1; \\ A(i+1,j,k+1) = A(i,j,A(i+1,j,k)), \text{ gdy } i,k \geq 1. \end{cases}$$

a) Oblicz $A(2, j, 1)$, $A(2, j, 2)$, $A(2, j, 3)$ oraz $A(3, j, 1)$, $A(3, j, 2)$, $A(3, j, 3)$.

b) Udowodnij, że $A(2, j, k) = j \cdot k$ oraz $A(3, j, k) = j^k$.

c) Oblicz $A(4, 2, 1)$, $A(4, 2, 2)$, $A(4, 2, 3)$. Udowodnij, że $A(4, j, k) = \left.j^{j^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{j}}}}}\right\}k$.

ZADANIE 7.5. Wykaż, że poniższy program wypisuje wyłącznie liczby całkowite.

$x := 1$;
`dopóki` $(1 > 0)$ `wykonuj`
  `wypisz`(x);
  $x := 3 + x + 2\sqrt{3x - 2}$;

Zadanie 7.6.* W mieście Skrzyżne nie ma ślepych ulic, tzn. jadąc dowolną ulicą w dowolnym kierunku zawsze dojedziemy do skrzyżowania, i wszystkie ulice są dwukierunkowe. Do każdego skrzyżowania dochodzi parzysta liczba ulic. Z każdego skrzyżowania można dojechać do każdego innego skrzyżowania. Udowodnij, że można w tym mieście przejechać wszystkie ulice tak, aby każdą ulicą jechać tylko jeden raz, rozpoczynając i kończąc podróż na tym samym skrzyżowaniu.

Wskazówka. Zastosuj indukcję względem liczby ulic. Skorzystaj z silniejszej wersji zasady indukcji matematycznej (krok indukcyjny: $[P(s) \wedge P(s+1) \wedge \cdots \wedge P(n)] \Rightarrow P(n+1)$)).

Zadanie 7.7.* Poniżej podany jest pseudo-kod algorytmu.

```
const k = ...;
type T = array[1...k] of integers;
for i = 1 to k - 1 do
     for j = 1 to k - i do
        if T[j] < T[j+1] then "zamień T[j] z T[j + 1]"
```

Udowodnij za pomocą indukcji, że powyższy algorytm sortuje tablicę `T` w porządku nierosnącym.

Wskazówka. Prześledź działanie algorytmu dla małego k, np. dla tablicy $T = [1, 3, 7, 2, 5]$. Co możesz powiedzieć o elemencie $T[j + 1]$ po zakończeniu pętli `for` dla $j = k - 1, k - 2, \ldots$? Co możesz powiedzieć o elementach $T[k - i + 1], \ldots, T[k]$ po wykonaniu pętli `for` dla $i = 1, 2, \ldots$?

Odpowiedzi do zadań

7.1. Rozważmy zbiór $P_n = \{1, 2, \dots, n\}$ i niech p_n oznacza liczbę podziałów zbioru P_n na dwa niepuste zbiory. Po pierwsze, zauważmy, że $p_1 = 0$. Po drugie, zauważmy, że mając podział zbioru P_{n-1} na dwa niepuste podzbiory A i B (nie ma znaczenia kolejność), możemy teraz z nich utworzyć dwa różne podziały zbioru P_n, także na niepuste podzbiory: $P_n = (A \cup \{n\}) \cup B$ lub podział $P_n = A \cup (B \cup \{n\})$. W ten sposób różne podziały (zbiory A i B) zbioru P_{n-1} generują różne podziały zbioru P_n i na odwrót – podział zbioru P_n wyznacza nam (poprzez usunięcie elementu n) jednoznacznie parę A i B tworzącą podział zbioru P_{n-1}, za wyjątkiem podziału P_n postaci $P_{n-1} \cup \{n\}$. W konsekwencji otrzymujemy, że

$$p_n = 2p_{n-1} + 1 \text{ dla } n \geq 2.$$

Następnie, aby odgadnąć wzór, stosujemy metodę iteracyjną:

$$\begin{aligned} p_n &= 2p_{n-1} + 1 \\ &= 2 \cdot (2p_{n-2} + 1) + 1 = 4p_{n-2} + 3 \\ &= 4 \cdot (2p_{n-3} + 1) + 3 = 8p_{n-3} + 7 \\ &= \dots \\ &= 2^{i-1} \cdot (2p_{n-i} + 1) + 2^i - 1 \\ &= \dots \\ &= 2^{n-1} \cdot p_1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze wykazać poprawność tego wzoru .

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $p_1 = 0 = 2^{1-1} - 1$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $p_n = 2^{n-1} - 1$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= [\text{wzór}] = 2p_n + 1 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 \\ &= 2^n - 1, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

7.2. Zauważmy najpierw, że $s_0 = 1$ (jedyny podzbiór to $\emptyset$) oraz $s_1 = 2$ (podzbiory $\emptyset$ oraz $\{1\}$), a np. $s_2 = 3$ (podzbiory $\emptyset, \{1\}$ oraz $\{2\}$) oraz $s_3 = 5$ (podzbiory $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ oraz $\{1, 3\}$). A zatem wydaje się, że możemy zapisać, że $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, z warunkami początkowymi $s_0 = 1$ oraz $s_1 = 2$. Rozwiązanie tej rekurencji pozostawiamy już do samodzielnego wykonania (jest to równanie rekurencyjne liniowe jednorodne, jego rozwiązanie można sprawdzić np. w oparciu o `https://www.wolframalpha.com`), a skupimy się jedynie na formalnym uzasadnieniu otrzymanego równania rekurencyjnego.

Zauważmy, że na szukane podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ składają się podzbiory, które nie zawierają elementu n oraz te, które go zawierają. Tych, które go nie zawierają, jest s_{n-1} (bierzemy o pożądanej własności podzbiory zbioru $\{1, 2 \dots, n-1\}$), natomiast te, które go zawierają, możemy otrzymać poprzez dodanie elementu n do dowolnego o pożądanej własności podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, n-2\}$ – tych zatem będzie s_{n-2}. Ostatecznie otrzymujemy formułę postaci $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, przy warunkach początkowych $s_0 = 1$ oraz $s_1 = 2$.

7.3. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej. Niech (e_k) będzie ciągiem określającym liczbę par w zbiorze X_k 0/1-ciągów długości k.

1. Krok bazowy: $k = 1$.

Tak, bo wtedy $X_0 = \{0, 1\}$ (0/1-ciągi jednoelementowe), a zatem $e_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$.

2. Założenie indukcyjne: $k \geq 1$.

Dla ustalonego $k \geq 1$, w zbiorze X_k 0/1-ciągów k-elementowych istnieje $k2^{k-1}$ par, czyli $e_k = k2^{k-1}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $k+1$ (≥ 2).

Zauważmy, że zbiór X_{k+1} można podzielić na dwa rozłączne podzbiory $X^0_{k+1} = \{x0\colon x \in X_k\}$ oraz $X_1 = \{y1\colon y \in X_k\}$, takie, że każdy 0/1-ciąg $x0 \in X^0_{k+1}$ tworzy parę z każdym 0/1-ciągiem $x1 \in X^1_{k+1}$. W konsekwencji otrzymujemy, że liczba e_{k+1} par w zbiorze X_{k+1} wyraża się wzorem

$$e_{k+1} = 2e_k + 2^k$$

(bo liczba 0/1-ciągów długości $k+1$ z jednym ustalonym bitem wynosi 2^k). Z założenia indukcyjnego zachodzi $e_k = k2^{k-1}$, a w konsekwencji

$$e_{k+1} = 2e_k + 2^k = 2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = k2^k + 2^k = (k+1)2^k,$$

co należało wykazać.

7.4. N/A

7.5. Na kolejno wypisywane liczby możemy spojrzeć jak na kolejne liczby ciągu (x_n), który zadany jest następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_n & = & 3 + x_{n-1} + 2\sqrt{3x_n - 2} \text{ dla } n \geq 2. \end{array}$$

Wyznaczmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 + 1 + 2\sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 3 + 1 + 2\sqrt{1} = 6 \\ x_3 = 3 + 6 + 2\sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 3 + 6 + 2\sqrt{16} = 17 \\ x_4 = 3 + 17 + 2\sqrt{3 \cdot 17 - 2} = 3 + 17 + \sqrt{49} = 34 \\ x_5 = \ldots \end{array}$$

Pozostaje wykazać — za pomocą indukcji matematycznej — że każdy z wyrazów tego ciągu jest liczbą całkowitą. Biorąc pod uwagę sam wzór, kluczową jest formuła $\sqrt{3x_n - 2}$, tzn. należy dodatkowo wykazać, że $\sqrt{3x_n - 2}$ jest także liczbą całkowitą. Liczba $\sqrt{3x_n - 2}$ będzie liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zachodzić

$$x_n = \frac{j_n^2 + 2}{3}$$

dla jakiejś całkowitej liczby j_n (bo wówczas $\sqrt{3x_n - 2)} = j_n$; implikuje to także, że x_n jest liczbą całkowitą) — a zatem dokładnie taką postać ma nasz predykat $P(n)$.

Możemy teraz bezpośrednio wykazać indukcyjnie predykat $P(n)$, ale warto bliżej przyjrzeć się kolejnym wyrazom ciągu (x_n) w kontekście wartości j_n. Zauważmy, że

$x_1 = 1 = \frac{1^2+2}{3}$, zatem $j_1 = 1$

$x_2 = 6 = \frac{4^2+2}{3}$, zatem $j_2 = 4$

$x_3 = 17 = \frac{7^2+2}{3}$, zatem $j_3 = 7$

$x_4 = 34 = \frac{10^2+2}{3}$, zatem $j_4 = 10$

$x_5 = \ldots.$

W świetle powyższej zależności uzyskanej dla kilku początowych wyrazów ciągu (x_n), nasz predykat $P(n)$ zastępujemy następującym predykatem $Q(n)$:

$$x_n = \frac{(3n-2)^2 + 2}{3}.$$

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, $x_1 = 1 = \frac{(3 \cdot 1 - 2)^2 + 2}{3}$.

2. Założenie indukcyjne: $n \geq 1$.

$$x_n = \frac{(3n-2)^2 + 2}{3}$$

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \quad [\text{wzór}] \ = 3 + x_n + 2\sqrt{3x_n - 2} \\
&= \quad [\text{założenie indukcyjne}] \ = 3 + \tfrac{(3n-2)^2+2}{3} + 2\sqrt{3\tfrac{(3n-2)^2+2}{3} - 2} \\
&= \quad 3 + \tfrac{(3n-2)^2+2}{3} + 2 \cdot (3n-2) \\
&= \quad \tfrac{9+(3n-2)^2+2+6\cdot(3n-2)}{3} \\
&= \quad \tfrac{9+9n^2-12n+4+2+18n-12}{3} \\
&= \quad \tfrac{9n^2+6n+3}{3} \\
&= \quad \tfrac{(3n+1)^2+2}{3},
\end{aligned}$$

co należało wykazać.

7.6. N/A

7.7. N/A