ZESTAW 6

INDUKCJA MATEMATYCZNA oraz REKURENCJA

ZADANIE 6.1. Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu (c_n), $n \geq 1$, spełniają warunek

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{2c_{n-1}+1},$$

wówczas zachodzi $c_n = \frac{c_0}{2nc_0+1}$.

ZADANIE 6.2. Ciąg (d_n) jest zadany wzorem

$$d_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} 1.$$

Uzasadnij, że $d_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

ZADANIE 6.3. Wyznacz wzór zwarty na n-ty wyraz ciągu (b_n) określonego rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} b_1 &= 7 \\ b_{n+1} &= b_n + 2(n+1) + 1 \text{ dla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Udowodnij poprawność wzoru.

ZADANIE 6.4. Zapisz definicję rekurencyjną dla ciągu $g_0, g_1, g_2, \ldots$, gdzie $g_n = (n+1)(2n+3)$.

ZADANIE 6.5. Zapisz definicję rekurencyjną dla ciągu $(h_n) = h_0, h_1, h_2, \ldots$, gdzie $h_n = 2 - (-1)^n$.

ZADANIE 6.6. Stosując równanie charakterystyczne rozwiąż następujące zależności rekurencyjne.

a) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, przy warunkach początkowych $a_0 = a_1 = 1$
b) $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$, przy warunkach początkowych $b_0 = b_1 = 4$.
c) $c_n - 4c_{n-1} + 4c_{n-2} = 0$, przy warunkach początkowych $c_0 = 0$ oraz $c_1 = 1$.
d) $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$, przy warunkach początkowych $d_0 = d_1 = 2$.

ZADANIE 6.7. W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi „$n(n+1)(2n+1)$ jest podzielne przez 6”.

ZADANIE 6.8. W oparciu o zasadę indukcji matematycznej wykaż, że jeśli n jest dowolną dodatnią liczbą nieparzystą, wówczas $5 \mid (2^n + 3^n)$.

ZADANIE 6.9. Ciąg (f_n) jest określony rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_n &= f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-2} + 1 \text{ dla } n \geq 3. \end{aligned}$$

Udowodnij, że żadna z liczb f_n nie jest podzielna przez 3.

Wskazówka. Korzystając z indukcji matematycznej, w kroku indukcyjnym, rozpatrz możliwe reszty z dzielenia przez 3 dla założenia indukcyjnego.

ZADANIE 6.10. Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu (r_n) spełniają warunki

$$r_1 = 1,\; r_2 = 2 \text{ oraz } r_n = r_{n-1} + r_{n-2} \text{ dla } n \geq 3,$$

wówczas zachodzi $r_n < (7/4)^n$.

ZADANIE 6.11. Wykaż, że jeżeli wyrazy ciągu (q_n) spełniają warunki

$$q_0 = q_1 = q_2 = 1 \text{ oraz } q_n = q_{n-2} + q_{n-3} \text{ dla } n \geq 3,$$

wówczas zachodzi $q_n \leq (4/3)^n$.

ZADANIE 6.12. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$.

Zadanie 6.13.* Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $\sum_{i=2}^{n} \frac{\sqrt{i}}{i-1} > \sqrt{n-1}$.

Zadanie 6.14.*

a) Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla dowolnych dodatnich rzeczywistych liczb $a_1, ..., a_n$ takich, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, zawsze zachodzi $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

b) Wywnioskuj z zależności w pkt. (a), że dla dowolnych dodatnich rzeczywistych liczb $b_1, ..., b_n$ zawsze zachodzi $\frac{b_n}{b_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_{i+1}} \geq n$.

Odpowiedzi do zadań

6.1. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $c_1 =$ [wzór] $= \frac{c_0}{2c_0+1} = \frac{c_0}{2 \cdot 1 \cdot c_0 + 1}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $c_n = \frac{c_0}{2nc_0+1}$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= [\text{wzór}] = \frac{c_n}{2c_n+1} \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = \frac{\frac{c_0}{2nc_0+1}}{2\frac{c_0}{2nc_0+1}+1} = \frac{\frac{c_0}{2nc_0+1}}{\frac{2c_0+2nc_0+1}{2nc_0+1}} = \frac{c_0}{2(n+1)c_0+1}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

6.2. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $d_1 = 1 = \frac{(1+2)\cdot(1+1)\cdot 1}{6}$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $d_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.
3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= [\text{wzór}] = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{j} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

6.3. Aby odgadnąć wzór, stosujemy metodę iteracyjną, tzn. rozwijamy wzór rekurencyjny do samego końca:

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + 2n + 1 \\ &= (b_{n-2} + 2(n-1) + 1) + 2n + 1 = b_{n-2} + 2(n-1) + 2n + 2 \\ &= (b_{n-3} + 2(n-2) + 1) + 2(n-1) + 2n + 2 = b_{n-3} + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n + 3 \\ &= \ldots \\ &= b_{n-i} + 2(n-i+1) + 2(n-i+2) \ldots 2(n-1) + 2n + i \\ &= \ldots \\ &= b_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n + (n-1) \\ &= 7 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n + (n-1) \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n + (n+4) \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) + (n+4) \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+4) = n(n+1) + n + 4 = n^2 + 2n + 4. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze wykazać poprawność wzoru $b_n = n^2 + 2n + 4$.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $b_1 = 7 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 4$.
2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $b_n = n^2 + 2n + 4$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \text{[wzór]} = b_n + 2(n+1) + 1 \\ &= \text{[założenie indukcyjne]} = (n^2 + 2n + 4) + 2(n+1) + 1 \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 4, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

6.4. W oparciu o definicję „rozwińmy” wyraz g_{n+1}.

$g_{n+1} = (n+2)(2n+5) = 2n^2 + 9n + 10 = 2n^2 + 5n + 3 + 4n + 7 = (n+1)(2n+3) + 4n + 7 = g_n + 4n + 7.$

W konsekwencji otrzymujemy, że

$$\begin{cases} g_0 = 3; \\ g_n = g_{n-1} + 4n + 3, \ n \geq 1. \end{cases}$$

6.5. Zgodnie ze wzorem $h_n = 2-(-1)^n$ zachodzi $h_{n-1} = 2-(-1)^{n-1} = 2+(-1)^n$, a zatem $(-1)^n = h_{n-1}-2$. W konsekwencji

$$h_n = 2 - (-1)^n = 2 - (h_{n-1} - 2) = 4 - h_{n-1}$$

z warunkiem początkowym $h_0 = 1$.

6.6.

a) Równanie charakterystyczne ma postać $x^2 = 2x + 3$, czyli $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$. Równanie to posiada zatem dwa pierwiastki: $x = -1$ oraz $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$a_n = E \cdot (-1)^n + F \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 1$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 1 &= E \cdot (-1)^0 + F \cdot 3^0 \\ 1 &= E \cdot (-1)^1 + F \cdot 3^1 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} 1 &= E + F \\ 1 &= -E + 3F \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = \frac{1}{2}$ oraz $F = \frac{1}{2}$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że

$$a_n = \frac{1}{2}\left((-1)^n + 3^n\right).$$

b) Równanie charakterystyczne ma postać $x^2 = x + 6$, czyli $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) = 0$. Równanie to posiada zatem dwa pierwiastki: $x = -2$ oraz $x = 3$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$b_n = E \cdot (-2)^n + F \cdot 3^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $b_0 = 4$ oraz $b_1 = 4$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 4 &= E \cdot (-2)^0 + F \cdot 3^0 \\ 4 &= E \cdot (-2)^1 + F \cdot 3^1 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} 4 &= E + F \\ 4 &= -2E + 3F \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E = \frac{8}{5}$ oraz $F = \frac{12}{5}$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że

$$b_n = \frac{4}{5}\left((-2)^{n+1} + 3^{n+1}\right).$$

c) Równanie charakterystyczne ma postać $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$. Równanie to posiada jeden pierwiastek podwójny $x=2$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$c_n = (E+Fn)\cdot 2^n.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $c_0=0$ oraz $c_1=1$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 0 &= (E+F\cdot 0)\cdot 2^0 \\ 1 &= (E+F\cdot 1)\cdot 2^1 \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} 0 &= E\cdot 2^0 \\ 1 &= 2E+2F \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E=0$ oraz $F=\frac{1}{2}$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że $c_n=n2^{n-1}$.

d) Równanie charakterystyczne ma postać $x^2=2x-1$, czyli $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$. Równanie to posiada jeden pierwiastek podwójny $x=1$. A zatem „zgadujemy”, że szukane rozwiązanie rozważanej rekurencji ma postać

$$c_n=(E+Fn)\cdot 1^n = E+Fn.$$

Rozważając teraz warunki poczatkowe $d_0=2$ oraz $d_1=2$, otrzymujemy układ równiań

$$\begin{cases} 2 &= E+F\cdot 0 \\ 2 &= E+F\cdot 1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $E=2$ oraz $F=0$. A zatem otrzymujemy ostatecznie, że $d_n=2$.

6.7. Zdefiniujmy ciąg liczbowy (a_n), gdzie $a_n=n(n+1)(2n+1)$ dla $n\geq 0$. Przy takim określeniu ciągu (a_n) pożądana przez nas własność brzmi: Wyrazy ciągu (a_n) są podzielne przez 6. Aby to wykazać, korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n=0$. Mamy $a_0=0\cdot 1\cdot 1=1$, a zatem a_0 jest podzielne przez 6.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n\geq 1$ zachodzi $6\mid a_n$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

$$a_{n+1} = [\text{wzór}] = (n+1)(n+2)(2n+3).$$

Aby wykorzystać teraz założenie indukcyjne, potrzebujemy związać otrzymane wyrażenie na a_{n+1} z wyrazem $a_n=n(n+1)(2n+3)$. Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)(n+2)(2n+3) \\ &= n(n+1)(2n+3)+2(n+1)(2n+3) \\ &= n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+2(n+1)(2n+3) \\ &= a_n+2(n+1)(3n+3) \\ &= a_n+6(n+1)^2 \end{aligned}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że a_n jest podzielne przez 6. Jako że $6(n+1)^2$ jest także podzielne przez 6, w konsekwencji suma $a_n+6(n+1)^2$ jest podzielna przez 6 $(n\geq 1)$, co należało wykazać.

6.8. Zdefiniujmy ciąg liczbowy (a_n), gdzie $a_n=2^n+3^n$ dla $n\geq 1$. Przy takim określeniu ciągu (a_n) pożądana przez nas własność brzmi: Nieparzyste wyrazy ciągu (a_n) są podzielne przez 5. Zdefiniujmy teraz ciąg (b_k), gdzie $b_k=a_{2k-1}=2^{2k-1}+3^{2k-1}$, $k\geq 1$. Przy takim określeniu ciągu (b_n), wspomniana wyżej własność równoważna jest własności „Wyrazy ciągu (b_k) są podzielne przez 5”. Aby to wykazać, korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $k=1$. Mamy $b_1=2^1+3^1=5$, a zatem b_1 jest podzielne przez 5.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $k\geq 1$ zachodzi $5\mid b_n$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $k+1$ (≥ 2).

$$b_{n+1} = [\text{wzór}] = 2^{2k+1} + 3^{2k+1}.$$

Aby wykorzystać teraz założenie indukcyjne, potrzebujemy związać otrzymane wyrażenie na b_{n+1} z wyrazem $b_n = 2^{2k-1} + 3^{2k-1}$. Postępujemy następująco:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2^{2k+1} + 3^{2k+1} \\ &= 4 \cdot 2^{2k-1} + 9 \cdot 3^{2k-1} \\ &= 4 \cdot (2^{2k-1} + 3^{2k-1}) + 5 \cdot 3^{2k-1} \\ &= b_n + 5 \cdot 3^{2k-1} \end{aligned}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że b_n jest podzielne przez 5. Jako że $5 \cdot 3^{2k-1}$ jest także podzielne przez 5, w konsekwencji suma $b_n + 5 \cdot 3^{2k-1}$ jest podzielna przez 5 ($k \geq 1$), co należało wykazać.

6.9. Wyznaczmy kilka kolejnych wyrazów ciągu (f_n) w oparciu o wzór $f_n = f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-2} + 1$ oraz warunki początkowe $f_1 = 1$ oraz $f_2 = 2$.

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_3 &= 2^2 + 1^2 + 1 + 1 = 7 \\ f_4 &= 7^2 + 2^2 + 2 + 1 = 50 \\ f_5 &= 50^2 + 7^2 + 7 + 1 = 2557 \\ f_6 &= 7^2 + 2^2 + 2 + 1 = 6540800 \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$f_1 \bmod 3 = f_3 \bmod 3 = f_5 \bmod 3 = 1$$

oraz

$$f_2 \bmod 3 = f_2 \bmod 3 = f_6 \bmod 3 = 2.$$

A zatem, aby wykazać, że żadna z liczb f_n nie jest podzielna przez 3, spróbujemy pokazać coś mocniejszego: reszta z dzielenia wyrazów nieparzystych ciągu (f_n) przez 3 wynosi 1, podczas gdy reszta z dzielenia przez 3 wyrazów parzystych ciągu (f_n) wynosi 2.

1. Krok bazowy: $n = 1$ oraz $n = 2$.

$$f_1 = 1 \text{ oraz } f_2 = 2, \text{ a zatem } f_1 = 1 \bmod 3 \text{ oraz } f_2 = 2 \bmod 3.$$

2. Założenie indukcyjne: $n \geq 1$.

$$\text{Dla nieparzystego } n \text{ zachodzi } f_n = 1 \bmod 3, \text{ a dla parzystego — } f_n = 2 \bmod 3.$$

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 2).

Załóżmy najpierw, że $n + 1$ jest nieparzyste. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_{n+1} \bmod 3 &= [\text{wzór}] = (f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1} + 1) \bmod 3 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = ((2 \bmod 3)^2 + (1 \bmod 3)^2 + 1 \bmod 3 + 1) \bmod 3 = 1 \bmod 3, \end{aligned}$$

co należało wykazać. Załóżmy teraz, że $n + 1$ jest parzyste. Wówczas zachodzi

$$\begin{aligned} f_{n+1} \bmod 3 &= [\text{wzór}] = (f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1} + 1) \bmod 3 \\ &= [\text{założenie indukcyjne}] = ((1 \bmod 3)^2 + (2 \bmod 3)^2 + 2 \bmod 3 + 1) \bmod 3 = 2 \bmod 3, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

6.10. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1, 2$. Tak, bo mamy $r_1 = 1 \leq \frac{7}{4}$ oraz $r_2 = 2 \leq (\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16}$.

2. Założenie indukcyjne: Dla każdej liczby $1 \leq k \leq n$ zachodzi $r_k \leq (\frac{7}{4})^k$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n + 1$ (≥ 3).

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} &= [\text{wzór}] = r_n + r_{n-1} \\
&= [\text{założenie indukcyjne dla } k = n-1 \text{ oraz } k = n] \leq (\tfrac{7}{4})^n + (\tfrac{7}{4})^{n-1} \\
&= (\tfrac{7}{4}+1)(\tfrac{7}{4})^{n-1} = \tfrac{44}{16} \cdot (\tfrac{7}{4})^{n-1} \\
&\leq \tfrac{49}{16} \cdot (\tfrac{7}{4})^{n-1} \\
&= (\tfrac{7}{4})^{n+1},
\end{aligned}
$$

co należało wykazać.

6.11. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1, 2, 3$. Tak, bo mamy $q_1 = 1 \leq \frac{4}{3}, q_2 = 1 \leq (\frac{4}{3})^2 = \frac{9}{4}$ oraz $q_3 = 1 \leq (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27}$.

2. Założenie indukcyjne: Dla każdej liczby $1 \leq k \leq n$ zachodzi $q_k \leq (\frac{7}{4})^k$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 3).

$$
\begin{aligned}
q_{n+1} &= [\text{wzór}] = q_{n-1} + q_{n-2} \\
&= [\text{założenie indukcyjne dla } k = n-2 \text{ oraz } k = n-1] \leq (\tfrac{4}{3})^{n-1} + (\tfrac{4}{3})^{n-2} \\
&= (\tfrac{4}{3}+1)(\tfrac{4}{3})^{n-2} = \tfrac{63}{27} \cdot (\tfrac{4}{3})^{n-2} \\
&\leq \tfrac{64}{27} \cdot (\tfrac{4}{3})^{n-2} \\
&= (\tfrac{4}{3})^{n+1},
\end{aligned}
$$

co należało wykazać.

6.12. Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 1$. Tak, bo mamy $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$.

2. Założenie indukcyjne: Dla ustalonego $n \geq 1$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 2).

Dalszy etap dowodu przebiega następująco. Rozważmy lewą stronę udowadnianej nierówności:

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Z założenia indukcyjnego zachodzi zatem, że

$$L \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Jeżeli pomnożymy obie strony przez $\sqrt{n+1}$, otrzymamy:

$$L\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n(n+1)} + 1.$$

Jako że $\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n+1$ (z monotoniczności funkcji $\sqrt{x}$), mamy:

$$L\sqrt{n+1} \geq n+1.$$

Dzieląc obie strony przez $\sqrt{n+1}$ dostajemy:

$$L \geq \sqrt{n+1},$$

co należało wykazać.

6.13. Niech $S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{\sqrt{i}}{i-1} > \sqrt{n-1}$. Korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 2$. Tak, bo $S_2 = \frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \sqrt{2}$.

2. Założenie indukcyjne: Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi $S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{\sqrt{i}}{i-1} > \sqrt{n-1}$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 3).

Rozważmy sumę

$$S_{n+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\sqrt{i}}{i-1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\sqrt{i}}{i-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} = S_n + \frac{\sqrt{n+1}}{n}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $S_n > \sqrt{n-1}$, a zatem zachodzi

$$S_{n+1} > \sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n}.$$

A zatem potrzebujemy wykazać, że

$$\sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} \geq \sqrt{n}.$$

Zauważmy teraz, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} \geq \sqrt{n} - \sqrt{n-1},$$

która to – po obustronnym wymnożeniu przez n – jest równoważna nierówności

$$\sqrt{n+1} \geq (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})n,$$

która to – po obustronnym wymnożeniu przez $(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ – jest równoważna nierówności

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})\sqrt{n+1} \geq (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})n,$$

która to, po wymnożeniu nawiasu po lewej stronie i po skorzystaniu ze wzoru skróconego mnożenia dla prawej strony, jest równoważna nierówności

$$\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1} \geq n.$$

Mając teraz na uwadze standardową nierówność $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (przy $a, b \geq 0$), zauważmy, że

$$\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1} \geq \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} \geq \sqrt{(n^2+1)+(n^2-1)} = n\sqrt{2} > n,$$

co w świetle rozważonych wyżej równoważnych nierówności implikuje

$$\sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} \geq \sqrt{n},$$

dając ostatecznie w konsekwencji

$$S_{n+1} \geq \sqrt{n},$$

co należało wykazać.

6.14.

a) Teza jest oczywiście prawdziwa, jeśli każda z liczb ciągu (a_n) równa się 1. A zatem możemy założyć, że dowolny rozważany ciąg (a_n) spełnia własność, że istnieje $a_i \leq 1$. Korzystamy teraz z zasady indukcji matematycznej.

1. Krok bazowy: $n = 2$. Załóżmy zatem, że $a_1 \cdot a_2 = 1$ (zauważmy, że zachodzi $a_1, a_2 \neq 1$). Niech $a_2 = \frac{1}{a_1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_1 + \tfrac{1}{a_1} = \tfrac{a_1^2+1}{a_1} \\ &= \tfrac{a_1^2-2a_2+1+2a_2}{a_1} = \tfrac{(a_1-1)^2}{a_1} + 2 \\ &> 2, \end{aligned}$$

ponieważ $(a_1-1)^2 > 0$ oraz $a_1 > 0$.

2. Założenie indukcyjne:

Dla każdego ciągu (a_n) spełniającego zależność $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

3. Krok indukcyjny. Rozważmy $n+1$ (≥ 3).

Przypomnijmy, że w rozważanym ciągu nie wszystkie wyrazy są równe 1, a zatem w ciągu tym – zakładając $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$ – istnieją wyrazy $a_i < 1$ oraz $a_j > 1$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a_1 < 1$ oraz $a_{n+1} > 1$ (bo zawsze możemy przenumerować wyrazy). Niech $b = a_1 \cdot a_{n+1}$ i rozważmy ciąg c_n dodatnich liczb rzeczywistych, gdzie $c_1 = b$ oraz $c_t = a_t$ dla $t = 2, 3, \ldots, n$. Wówczas z założenia o ciągu (a_n) zachodzi $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = 1$, a w konsekwencji, z założenia indukcyjnego, otrzymujemy, że $\sum_{i=1}^{n} c_n \geq n$, czyli

$$b + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n,$$

co jest równoważne

$$(b+1) + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n+1.$$

Zauważmy teraz, że zawsze zachodzi $(1-a_1)(1-a_{n+1}) > 0$ (przypomnijmy, że $a_1, a_{n+1} \neq 1$), a zatem

$$1 - a_1 - a_{n+1} + a_1 a_{n+1} = 1 - a_1 + a_{n+1} + b > 0,$$

co implikuje

$$a_1 + a_{n+1} > b + 1.$$

W konsekwencji otrzymujemy nierówność

$$a_1 + a_{n+1} + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b+1) + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n,$$

a zatem

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geq n+1,$$

co należało wykazać.

b) Wystarczy rozważyć ciąg (a_n), gdzie $a_1 = \frac{b_n}{b_1}$ oraz $a_i = \frac{b_{i-1}}{b_i}$, $i = 2, \ldots, n$. Wówczas z definicji zachodzi $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, a w konsekwencji, na mocy pkt. (a), zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n.$$

W konsekwencji, mając na uwadze definicję ciągu (a_n), otrzymujemy

$$\frac{b_n}{b_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_{i+1}} \geq n,$$

co należało wykazać.