ZESTAW 5

ELEMENTY PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zadanie 5.1.$^{\blacktriangle}$ Cyfry $0, \ldots, 9$ ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a) 1 i 2 stoją obok siebie;
b) pomiędzy 1 i 2 stoją dwie cyfry;
c) 0, 1 i 2 stoją obok siebie?

Zadanie 5.2.$^{\blacktriangle}$ Z elementów $1, 2, 3$ utworzono wszystkie możliwe permutacje. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wybranej losowo permutacji:

a) są nie mniej niż dwie inwersje;[1]
b) element 2 tworzy jedną inwersję.

ZADANIE 5.3. Pewna gra polega na rzucie kostką i monetą. Wygrana następuje przy łącznym otrzymaniu piątki i orła. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trzech grach wygrana nastąpi dokładnie raz?

ZADANIE 5.4. Dana jest urna, w której są kule: 6 czarnych i 9 białych. Losujemy 5 razy po jednej kuli, kładąc za każdym razem wyciągniętą kulę z powrotem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy co najwyżej 3 razy kulę białą?

ZADANIE 5.5. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na 7 rzutów kostką co najwyżej 3 razy wypadnie liczba oczek nie mniejsza niż 4.

ZADANIE 5.6. Rzucono symetryczną monetą dziewięć razy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) orzeł wypadł co najmniej raz;
b) orzeł wypadł parzystą liczbę razy.

ZADANIE 5.7. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w serii sześciu rzutów symetryczną kostką do gry suma oczek będzie parzysta?

ZADANIE 5.8. Z urny, w której znajduje się 20 kul białych i 2 kule czarne, wyjmuje się kolejno n kul, przy czym każdą wyciągniętą kulę kładzie się z powrotem do urny. Znaleźć najmniejszą wartość n taką, przy której prawdopodobieństwo wylosowania chociaż raz czarnej kuli jest większe od $\frac{1}{2}$.

Wskazówka. Rozważyć zdarzenie przeciwne: że wśród n losowań pojawiły się same kule białe.

ZADANIE 5.9. Rzucamy dwukrotnie monetą. Niech zdarzenie A oznacza, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł, a zdarzenie B – że wypadł dokładnie jeden orzeł. Oblicz $P(A|B)$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

ZADANIE 5.10. Rzucamy trzykrotnie monetą. Niech zdarzenie A oznacza, że za pierwszym oraz drugim razem wypadło to samo, zdarzenie B – za pierwszym i trzecim razem wypadło to samo, a zdarzenie C – za drugim i trzecim razem wypadło to samo. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne (a) parami, (b) zespołowo?

---

[1] Niech $(a_1, \ldots, a_n)$ będzie permutacją n różnych liczb. Para liczb (a_j, a_k), $j < k$, tworzy *inwersję*, jeśli $a_j > a_k$.

ZADANIE 5.11. Cyfry $1, 2, 3, 4, 5$ są napisane na pięciu kartkach tak, że każdej cyfrze odpowiada jedna kartka. Pobieramy losowo jednocześnie trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą;
b) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą, jeżeli wylosowano jedną liczbę nieparzystą;
c) suma otrzymanych liczb jest liczbą parzystą, jeżeli wylosowano jedną liczbę parzystą?

ZADANIE 5.12. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych będzie zbiorem 3-elementowych ciągów zero-jedynkowych. Rozważmy zdarzenia:

a) na 1. współrzędnej stoi 0;
b) na 1. i 3. współrzędnej stoi 0;
c) na 1. i 3. współrzędnej mamy różne wartości;
d) na wszystkich współrzędnych to samo.

Jakie jest klasyczne prawdopodobieństwo tych zdarzeń? Czy zdarzenia te są parami niezależne? Uogólnij następnie rozważania na przestrzeń dla ciągów $n \geq 3$-elementowych.

ZADANIE 5.13. Losujemy jedną kulę z jednej z 4 urn typu A i 16 urn typu B. W każdej z urn typu A znajduje się 7 kul białych i 3 kule czarne, natomiast w każdej z urn typu B znajdują się 4 kule białe i 6 kul czarnych. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia C polegającego na wylosowaniu kuli białej?

ZADANIE 5.14. Mamy dwie urny z kulami: w I. urnie są 2 kule białe i 4 czarne, w II. urnie są 3 kule białe i 3 czarne. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1 lub 2, to losujemy kulę z I. urny, jeśli wypadnie $3, 4, 5$ lub 6, to losujemy kulę z II. urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą?

ZADANIE 5.15. Z urny, w której jest b kul białych i c kul czarnych, wyjęto losowo jedną kulę. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej, jeśli nie znamy koloru kuli poprzednio wylosowanej?

ZADANIE 5.16. W urnie jest n kul, w tym $k \leq n$ białych. n osób losuje kulę po kolei bez zwracania (nie informując o wyniku do zakończenia wysztkich losowań). Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej dla:

a) 2-giej osoby;
b) 3-ciej osoby;
c) ostatniej osoby?

ZADANIE 5.17. Pewna izotropowa metoda wykrywania uszkodzeń daje następujące wyniki. Jeśli urządzenie ma uszkodzenie, to metoda ta pozwala na jego wykrycie w 90% przypadków i nie wykrywa go w 10% przypadków. Jeśli urządzenie nie ma uszkodzenia, to metoda ta daje w 99% przypadków informacje zgodne ze stanem faktycznym i w 1% przypadków informacje o defekcie, którego nie ma. W pewnej partii urządzeń jest 2% mających defekt. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wylosowane urządzenie rozpoznane jako uszkodzone jest rzeczywiście uszkodzone?

ZADANIE 5.18. Wiadomo, że 50% procesorów wytwarzanych w fabryce ma usterki. Wiadomo również, że pewne procesory są kradzione jeszcze przed kontrolą jakości i nielegalnie trafiają na rynek. Inspekcja pokazała, że tylko 5% legalnie sprzedawanych procesorów ma usterki i że 1% procesorów będących w sprzedaży pochodzi z kradzieży. Oblicz prawdopodobieństwo, że uszkodzony procesor zakupiony na rynku pochodzi z kradzieży.

Odpowiedzi do zadań

5.1. (a) $\frac{2!\cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}$, (b) $\frac{2\cdot 7\cdot 8!}{10!} = \frac{7}{45}$, (c) $\frac{3!\cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}$.

5.2. Wypiszmy wszystkie możliwe permutacje i zliczmy dla każdej z nich liczbę inwersji. I tak w permutacji 123 jest 0 inwersji, w $\underline{132}$ jest 1 inwersja, w $\underline{213}$ jest 1 inwersja, w 231 są 2 inwersje, w 312 są 2 inwersje, w 321 są 3 inwersje. Element 2 tworzy jedną inwersję w permutacjach podkreślonych. Korzystając z założenia losowego wyboru permutacji i klasycznej definicji prawdopodobieństwa otrzymujemy, że $p_1 = \frac{1}{2}$ i $p_2 = \frac{1}{3}$.

5.3. $\frac{121}{576}$

5.4. $\frac{2072}{3125}$

5.5. $\frac{1}{2}$

5.6.

a) $\frac{511}{512}$;

b) $\frac{1}{2}$.

5.7. $\frac{1}{2}$

5.8. Jeżeli przez E oznaczymy zdarzenie polegające na tym, że w n losowaniach przynajmniej raz pojawi się kula czarna, to $\overline{E}$ oznaczać będzie zdarzenie, że wśród tych n losowań pojawiły się kule wyłącznie białe. Z warunku zadania mamy, że $P(\overline{E}) = \left(\frac{20}{22}\right)^n$, co tym samym daje $P(E) = 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n > \frac{1}{2}$. Stąd otrzymujemy, że $\left(\frac{10}{11}\right)^n < \frac{1}{2}$, czyli po zlogarytmowaniu $n > 7$, a więc $n = 8$.

5.9. $P(A|B) = \frac{1}{2}$; zdarzenia A i B są niezależne.

5.10. N/A

5.11.

a) $\frac{3}{5}$

b) 0

c) 1

5.12.

a) $P(A) = \frac{1}{2}$;

b) $P(B) = \frac{1}{4}$;

c) $P(C) = \frac{1}{2}$;

d) $P(D) = \frac{1}{8}$.

W ogólnym przypadku, analizując możliwe zdarzenia elementarne otrzymamy, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Zdarzenia te nie są wszystkie parami niezależne, bo np. $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Ogólnie — niezależne parami są tylko zdarzenia A i C oraz A i D.

5.13. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wybraniu urny typu A, a B – wybraniu urny typu B. Niech C oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{23}{50}.$$

5.14. Niech $K_{1,2}$ oznacza zdarzenie polegające na wypadnięciu na kostce 1 lub 2, a $\overline{K_{1,2}}$ – zdarzenie doń przeciwne. Niech B oznacza wylosowanie kuli białej. Wówczas z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym otrzymujemy

$$P(B) = P(K_{1,2}) \cdot P(B|K_{1,2}) + \cdot P(\overline{K_{1,2}}) \cdot P(B|\overline{K_{1,2}}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

5.15. Losowanie kuli z urny o ustalonym składzie pociąga za sobą następującą alternatywę wykluczających się zdarzeń przy pierwszym losowaniu: albo wylosowano kulę białą – zdarzenie B_1, albo kulę czarną – zdarzenie C_1. Wówczas zdarzenie B_2, o którym mowa w zadaniu, polega na wylosowaniu kuli białej za drugim razem. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy zatem

B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej za pierwszym razem.
C_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej za pierwszym razem.
B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej za drugim razem.

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) + P(C_1) \cdot P(B_2|C_1) = \tfrac{b}{b+c} \cdot \tfrac{b-1}{b+c-1} + \tfrac{c}{b+c} \cdot \tfrac{b}{b+c-1} \\ &= \tfrac{b \cdot (b-1+c)}{(b+c) \cdot (b+c-1)} = \tfrac{b}{b+c}. \end{aligned}$$

5.16. $\frac{k}{n}$ (patrz poprzednie zadanie)

5.17. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

O_+ — zdarzenie polegające na rozpoznaniu urządzenia jako poprawnego
O_- — zdarzenie polegające na rozpoznaniu urządzenia jako wadliwego
U_+ — zdarzenie polegające na wybraniu nieuszkodzonego urządzenia
U_- — zdarzenie polegające na wybraniu uszkodzonego urządzenia
$O_-|U_+$ — zdarzenie polegające na wybraniu nieuszkodzonego urządzenia i stwierdzeniu jego uszkodzenia
$O_-|U_-$ — zdarzenie polegające na wybraniu uszkodzonego urządzenia i stwierdzeniu jego uszkodzenia

Z warunków zadania otrzymujemy, że:

$P(U_+) = \frac{98}{100}$

$P(U_-) = \frac{2}{100}$

$P(O_-|U_+) = \frac{1}{100}$

$P(O_-|U_-) = \frac{90}{100}$

Z treści zadania wynika, że potrzebujemy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosowane urządzenie, rozpoznane jako uszkodzone jest rzeczywiście uszkodzone, czyli interesuje nas

$$P(U_-|O_-).$$

Sposób I. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy, że

$$P(U_-|O_-) = \frac{P(U_- \cap O_-)}{P(O_-)}.$$

Jeśli chodzi o mianownik, to możemy go wyznaczyć ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(O_-) = P(O_-|U_+) \cdot P(U_+) + P(O_-|U_-) \cdot P(U_-),$$

a zatem

$$P(O_-) = \frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{278}{10000}.$$

Jeśli chodzi o wartość $P(U_- \cap O_-)$, to możemy jeszcze raz skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe. Zauważmy, że

$$P(O_-|U_-) = \frac{P(U_- \cap O_-)}{P(U_-)},$$

a zatem

$$P(U_- \cap O_-) = P(O_-|U_-) \cdot P(U_-).$$

W konsekwencji

$$P(U_- \cap O_-) = \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{180}{10000},$$

co ostatecznie implikuje

$$P(U_-|O_-) = \frac{\frac{180}{10000}}{\frac{278}{10000}} = \frac{180}{278}.$$

Sposób II. (Sposób ten jest „skróconym” sposobem **a)**) Możemy od razu skorzystać ze wzoru Bayes'a, który przy tak przyjętach oznaczeniach wygląda następująco:

$$P(U_-|O_-) = \frac{P(O_-|U_-) \cdot P(U_-)}{P(O_-)}.$$

Jeśli chodzi o mianownik, to możemy go wyznaczyć ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(O_-) = P(O_-|U_+) \cdot P(U_+) + P(O_-|U_-) \cdot P(U_-),$$

a zatem

$$P(O_-) = \frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{278}{10000}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$P(U_-|O_-) = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{278}{10000}} = \frac{180}{278}.$$

5.18. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

L — zdarzenie polegające na zakupie legalnego procesora
K — zdarzenie polegające na zakupie kradzionego procesora
U_+ — zdarzenie polegające na zakupie nieuszkodzonego procesora
U_- — zdarzenie polegające na zakupie uszkodzonego procesora
$U_-|L$ — zdarzenie polegające na zakupie uszkodzonego procesora z partii procesorów legalnych
$U_-|K$ — zdarzenie polegające na zakupie uszkodzonego procesora z partii procesorów kradzionych

Z warunków zadania otrzymujemy, że:

$P(L) = \frac{99}{100}$

$P(K) = \frac{1}{100}$

$P(U_-|L) = \frac{5}{100}$

$P(U_-|K) = \frac{1}{2}$

Z treści zadania wynika, że potrzebujemy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że uszkodzony procesor zakupiony na rynku pochodzi z kradzieży, czyli interesuje nas

$$P(K|U_-).$$

Korzystając ze wzoru Bayes'a, otrzymujemy, że

$$P(K|U_-) = \frac{P(U_-|K) \cdot P(K)}{P(U_-)}.$$

Jeśli chodzi o mianownik, to możemy go wyznaczyć ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(U_-) = P(U_-|L) \cdot P(L) + P(U_-|K) \cdot P(K),$$

a zatem

$$P(U_-) = \frac{5}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} = \frac{545}{10000}.$$

W konsekwencji otrzymujemy, że

$$P(K|U_-) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{545}{10000}} = \frac{10}{109}.$$