ZESTAW 4

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZADANIE 4.1. W grupie 30 studentów 20 lubi grać w piłkę nożną, 15 – w koszykówkę, a kilku – w siatkówkę. W piłkę nożną i koszykówkę lubi grać 10 osób, w piłkę nożną i siatkówkę – 3 osoby, a w koszykówkę i siatkówkę – 2 osoby. Ponadto tylko jedna osoba lubi grać we wszystkie trzy gry. Ile osób lubi grać tylko w siatkówkę?

ZADANIE 4.2. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, \dots, 99\}$, które nie są podzielne przez żadną z liczb $2, 3, 5$ lub 7?

ZADANIE 4.3. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, \dots, 2000\}$, które są podzielne przez $9, 11, 13$ lub 15.

ZADANIE 4.4. Uzasadnij, że wśród dowolnych pięciu punktów należących do trójkąta równobocznego o boku długści 2 cm zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż 1 cm.

Wskazówka. Podziel trójkąt na cztery trójkąty równoboczne o boku długości 1 cm.

ZADANIE 4.5. Niech O będzie kołem o promieniu $r = 1$ cm. Niech $S \subset O$ będzie takim zbiorem punktów należącym do koła, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami z S wynosi przynajmniej 1.1 cm. Uzasadnij, że $|S| \leq 6$.

Wskazówka. Podziel koło na sześć takich samych wycinków.

ZADANIE 4.6. W grupie stu wysportowanych studentów 85 gra w piłkę nożną, 80 – w tenisa, 70 – w siatkówkę, a 66 biega. Czy wśród tych studentów znajduje się taki, który trenuje wszystkie te dyscypliny sportowe?

ZADANIE 4.7. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych będzie istniała para liczb różniących się o wielokrotność n.

Wskazówka. Mając dane liczby $l_0, \dots, l_n$ rozważ n szufladek ponumerowanych $0, 1, \dots, n-1$. Następnie rozważ każdą z liczb l_i i włóż ją do szufladki odpowiadającej reszcie z dzielenia tej liczby przez n.

ZADANIE 4.8. Ułamek $\frac{m}{k}$, gdzie $m, k \in \mathbb{N}^+$ oraz $m < k$, przedstawiamy w postaci dziesiętnej. Udowodnij, że okres tego ułamka jest nie większy niż k.

Wskazówka. Rozważ algorytm dzielenia m przez k.

ZADANIE 4.9. Mając danych dziesięć dowolnych różnych całkowitych liczb dodatnich mniejszych od 107 pokazać, że będą istniały dwa rozłączne podzbiory tych liczb, których elementy dają taką samą sumę.

Wskazówka. Ile wynosi najmniejsza i największa możliwa suma do uzyskania z dowolnego niepustego podzbioru zbioru dowolnych dziecięciu różnych liczb dodatnich mniejszych od 107? A ile jest podzbiorów dowolnego zbioru 10-elementowego?

Zadanie 4.10.* Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$ istnieje taka, która jest wielokrotnością innej.

Wskazówka. Rozważ n szuflad ponumerowanych kolejnymi liczbami nieparzystymi $1, 3, \dots, 2n-1$. Każdą z wylosowanych liczb wkładamy do szuflady z numerem m, jeżeli $k = 2^r m$ dla jakiegoś $r \geq 0$.

ZADANIE 4.11. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 4.12. Wypisz 10 kolejnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ poczynając od podzbioru $\{1, 2, 3, 5\}$.

ZADANIE 4.13. Wypisz 10 kolejnych 3-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZADANIE 4.14. Wypisz 10 kolejnych 5-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

ZADANIE 4.15. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 6\}$ poczynając od permutacji (456321).

ZADANIE 4.16. Wypisz 10 kolejnych permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, 7\}$ poczynając od permutacji (5463721).

Odpowiedzi do zadań

4.1. Na podstawie zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczba osób lubiących grać w siatkówkę wynosi 9. Mając teraz na uwadze tylko to, ile osób lubi grać w piłkę nożną i siatkówkę, ile w koszykówkę i siatkówkę, oraz ile we wszystkie trzy gry, znów stosując np. zasadę włączania-wyłączania, otrzymujemy, że 5 osób lubi grać tylko w siatkówkę.

4.2. Niech $D_k = \{n \in \{1, \ldots, 99\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas z zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że liczb mniejszych od 100 i niepodzielnych przez $2, 3, 5$, ani 7 jest

$$99 - |D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup D_7| = 99 - (49 + 33 + 19 + 14 - 16 - 9 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0) = 22.$$

4.3. Niech $D_k = \{n \in \{1, \ldots, 2000\} \colon n \text{ jest podzielne przez } k\}$. Wówczas:

- $|D_9| = \lfloor \frac{2000}{9} \rfloor = 222$, $|D_{11}| = \lfloor \frac{2000}{11} \rfloor = 181$, $|D_{13}| = \lfloor \frac{2000}{13} \rfloor = 153$, $|D_{15}| = \lfloor \frac{2000}{15} \rfloor = 133$;
- $|D_9 \cap D_{11}| = |D_{99}| = \lfloor \frac{2000}{99} \rfloor = 20$, $|D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = \lfloor \frac{2000}{117} \rfloor = 17$,
  $|D_9 \cap D_{15}| = |D_{45}| = \lfloor \frac{2000}{45} \rfloor = 44$, $|D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = \lfloor \frac{2000}{143} \rfloor = 13$,
  $|D_{11} \cap D_{15}| = |D_{165}| = \lfloor \frac{2000}{165} \rfloor = 12$, $|D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = \lfloor \frac{2000}{195} \rfloor = 10$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| = |D_{1287}| = \lfloor \frac{2000}{1287} \rfloor = 1$, $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = \lfloor \frac{2000}{495} \rfloor = 4$,
  $|D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{585}| = \lfloor \frac{2000}{585} \rfloor = 3$, $|D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = \lfloor \frac{2000}{2145} \rfloor = 0$;
- $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{6435}| = \lfloor \frac{2000}{6435} \rfloor = 0$.

Zauważmy, że $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$, a nie D_{135}, ponieważ najmniejszcza wspólna wielokrotność liczb 9 oraz 15 wynosi 45; podobna ostrożność jest konieczna w przypadku $D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}, D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}$, itd. Wówczas na mocy zasady włączania-wyłączania otrzymujemy, że

$$|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}| = 222 + 181 + 153 + 133 - (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10) + (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581.$$

4.11.

$\emptyset$
$\{6\}$
$\{5\}$
$\{5, 6\}$
$\{4\}$
$\{4, 6\}$
$\{4, 5\}$
$\{4, 5, 6\}$
$\{3\}$
$\{3, 6\}$

4.12.

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3, 4, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6\}$
$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4.13.

$\{1,2,3\}$
$\{1,2,4\}$
$\{1,3,4\}$
$\{2,3,4\}$
$\{1,2,5\}$
$\{1,3,5\}$
$\{2,3,5\}$
$\{1,4,5\}$
$\{2,4,5\}$
$\{3,4,5\}$

4.14.

$\{1,2,3,4,5\}$
$\{1,2,3,4,6\}$
$\{1,2,3,5,6\}$
$\{1,2,4,5,6\}$
$\{1,3,4,5,6\}$
$\{2,3,4,5,6\}$
$\{1,2,3,4,7\}$
$\{1,2,3,5,7\}$
$\{1,2,4,5,7\}$
$\{1,3,4,5,7\}$

4.15.

$\{4,6,1,2,3,5\}$
$\{4,6,1,2,5,3\}$
$\{4,6,1,3,2,5\}$
$\{4,6,1,3,5,2\}$
$\{4,6,1,5,2,3\}$
$\{4,6,1,5,3,2\}$
$\{4,6,2,1,3,5\}$
$\{4,6,2,1,5,3\}$
$\{4,6,2,3,1,5\}$
$\{4,6,2,3,5,1\}$

4.16.

$\{5,4,6,7,1,2,3\}$
$\{5,4,6,7,1,3,2\}$
$\{5,4,6,7,2,1,3\}$
$\{5,4,6,7,2,3,1\}$
$\{5,4,6,7,3,1,2\}$
$\{5,4,6,7,3,2,1\}$
$\{5,4,7,1,2,3,6\}$
$\{5,4,7,1,2,6,3\}$
$\{5,4,7,1,3,2,6\}$
$\{5,4,7,1,3,6,2\}$