ZESTAW 3

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZADANIE 3.1. Na ile sposobów można rozdzielić siedem różnych kwiatów do dwóch (nierozróżnialnych) doniczek tak, aby w każdej doniczce był przynajmniej jeden kwiat?

ZADANIE 3.2. Na ile sposobów można spakować osiem różnych książek do czterech (takich samych, dostatecznie dużych) pudeł tak, aby każde pudło zawierało przynajmniej jedną książkę?

ZADANIE 3.3. Wyznacz liczbę wszystkich surjekcji ze zbioru 8-elementowego na zbiór 5-elementowy.

ZADANIE 3.4. Wyznacz liczbę wszystkich możliwych podziałów zbioru 6-elementowego.

ZADANIE 3.5. Wyznacz, ile jest podziałów liczby 11 na 5 składników:

a) generując wszystkie podziały;
b) w oparciu o wzór rekurencyjny.

ZADANIE 3.6. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest takich rozmieszczeń kul w komórkach, że żadna komórka nie jest pusta?

ZADANIE 3.7. Mamy r jednakowych kul i n różnych komórek. Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń kul w komórkach?

ZADANIE 3.8. Udowodnij równość $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
Wskazówka. Rozważ liczbę wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego.

ZADANIE 3.9. Udowodnij równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$.
Wskazówka. Rozważ wybór k liczb spośród n różnych liczb: uporządkuj je rosnąco i rozważ wybory z wyróżnionym najmniejszym elementem.

ZADANIE 3.10. Udowodnij równość $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.
Wskazówka. Rozważ sytuację, w której mamy dokonać wyboru m osobowej delegacji spośród n osób, a następnie w tej delegacji wybrać k-osobowy zarząd.

ZADANIE 3.11. Udowodnij równość $\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{m+n}{k}$.
Wskazówka. Rozważ wybór k osób spośród grupy n kobiet i m mężczyzn.

ZADANIE 3.12. Udowodnij równość $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
Wskazówka. Rozważ wybór n osób spośród grupy n kobiet i n mężczyzn.

ZADANIE 3.13. Z poprzedniego zadania otrzymujemy, że chcąc wybrać z grupy $2n$ osób, składającej z n kobiet i n mężczyzn, podzbiór o takiej samej liczbie kobiet i mężczyzn, podzbiór ten może być wybrany na $\binom{2n}{n}$ sposobów. Zakładając, że po wybraniu takiego podzbioru chcemy ustalić ponadto przywódcę wśród mężczyzn i przywódczynię wśród kobiet, uzasadnij, że $\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$.

ZADANIE 3.14. Udowodnij równość $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k\binom{n}{k}$.
Wskazówka. Rozważ kolorowanie k spośród n obiektów, mając do dyspozycji dwa kolory.

Odpowiedzi do zadań

3.1. $\left\{ {7 \atop 2} \right\} = 63$

3.2. $\left\{ {8 \atop 4} \right\} = 1701$

3.3. $\left\{ {8 \atop 5} \right\} \cdot 5! = 1050 \cdot 120 = 126000$

3.4. $B_6 = 203$

3.5. 10

3.6. Niech $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$. A zatem szukana liczba takich rozmieszczeń to $\binom{r-1}{n-1}$.

3.7. Niech $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, będzie liczbą kul w komórce i. Wówczas zachodzi $x_1 + \ldots x_n = r$. A zatem liczba wszystkich takich rozmieszczeń jest równa $\binom{r+n-1}{n-1}$.