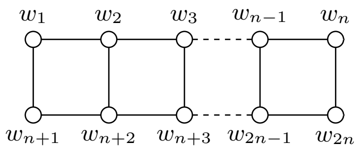
ZESTAW 2

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZADANIE 2.1. Ile palindromów długości m można utworzyć korzystając z liter alfabetu n-elementowego?

ZADANIE 2.2. Na ile sposobów można zorientować krawędzie/połączenia (czyniąc je *łukami*) w kracie $L(2,n)$, otrzymując tzw. graf *skierowany*?

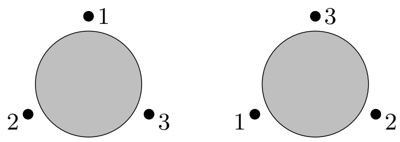


krata $L(2,n)$

ZADANIE 2.3. Na ile sposobów różnych można rozsadzić:

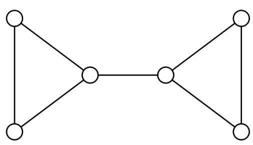
a) 3 osoby na 3-osobowej karuzeli;
b) 4 osoby na 4-osobowej karuzeli;
c) n osób na n-osobowej karuzeli?

Uwaga. Jako że karuzela kręci się, dwa rozsadzenia uważamy za różne, jeżeli co najmniej jedna osoba ma co najmniej z jednej strony innego sąsiada — czyli np. rozsadzenia na poniższym rysunku są identyczne.

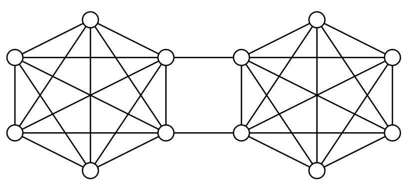


ZADANIE 2.4. Ile różnych nieparzystych liczb 8-cyfrowych można utworzyć z cyfr $2, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 9$?

ZADANIE 2.5. Rozważmy strukturę połączeń/dróg między różnymi miastami przedstawioną na poniższym rysunku. Mając do dysposyzji k różnych kolorów świateł, na ile sposobów można oświetlić każde z miast jednym kolorem tak, aby dwa sąsiednie miasta były oświetlone różnymi kolorami?



ZADANIE 2.6. Rozważmy strukturę połączeń/dróg między różnymi miastami przedstawioną na poniższym rysunku. Ile jest różnych tras komiwojażera[1] w tej strukturze?



[1]Przez trasę komiwojażera rozumiemy zamkniętą trasę, która odwiedza każde miasto dokładnie oraz korzysta wyłącznie z dopuszczalnych dróg/połączeń.

ZADANIE 2.7. Na ile sposobów można utworzyć trzy rozłączne komisje z osób wybranych z 20-osobowej grupy, jeśli muszą one mieć odpowiednio $3, 5$ oraz 7 członków?

ZADANIE 2.8. Na ile sposobów można podzielić grupę $3n$ zawodników na n drużyn po trzech zawodników w każdej?

ZADANIE 2.9. W poczekalni u lekarza w rzędzie z n krzeseł siedzi k pacjentów w ten sposób, że żadni dwaj z nich nie znajdują się na sąsiednich krzesłach. Na ile sposobów może być wybrany odpowiedni zbiór krzeseł, gdy pacjenci są (**a**) nierozróżnialni, (**b**) rozróżnialni?

Wskazówka. Rozważyć równoważną sytuację, w której każdy z k pacjentów przychodzi z własnym krzesłem i wstawia/dostawia je odpowiednio do stojących już $n - k$ krzeseł.

ZADANIE 2.10. Na ile sposobów można wybrać trzy różne liczby spośród liczb od 1 do 60 tak, aby ich suma była:

a) nieparzysta;
b) parzysta;
c) podzielna przez 3?

Wskazówka (c). Podzielmy zbiór $R = \{1, 2, \ldots, 60\}$ na trzy (rozłączne) podzbiory R_0, R_1 i R_2, gdzie R_i jest zbiorem tych liczb z R, których reszta z dzielenia przez 3 daje i. Zauważmy, że np. suma dowolnych trzech elementów ze zbioru R_0 daje liczbę podzielną przez 3. Takich trójek jest $\binom{20}{3}$. Zatem — jak można i należy wybierać liczby ze zbiorów R_0, R_1 i R_2 tak, aby otrzymać żądaną sumę? Ile jest takich wyborów?

ZADANIE 2.11. Udowodnij równość $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

Wskazówka. Skorzystaj z własności $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

ZADANIE 2.12. Kod Morse'a zbudowany jest ze skończonych ciągów długości kropek i kresek, które odpowiadają znakom alfanumerycznym. Długość kodu to suma wag poszczególnych elementów, przy czym kropka ma wagę 1, natomiast kreska ma wagę 2. Przykładowo, wszystkie kody długości 3 wyglądają następująco: $\cdots \quad \cdot - \quad - \cdot$. Ile jest wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 2.13.* *Zbalansowane* ciągi binarne długości $2n$ zawierają n zer i n jedynek oraz spełniają warunek: dla każdego k $(1 \leq k \leq 2n)$ na początkowych k pozycjach liczba zer jest nie mniejsza niż liczba jedynek.

a) Wyznacz wszystkie takie ciągi dla $n = 4$.
b) Wyznacz ich liczbę ogólnie dla n.

Odpowiedzi do zadań

2.1. $n^{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$

2.2. 2^{3n-2}

2.3.

a) $3!/3 = 2$

b) $4!/4 = 6$

c) $n!/n = (n-1)!$

2.4. $\frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{2!3!} = \frac{7!}{8}$

2.5. $k(k-1)^3(k-2)^2$

2.6. $2 \cdot (4!)^2 = 1152$

2.7. $\binom{20}{3} \cdot \binom{17}{5} \cdot \binom{12}{7} = \frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 5!}$

2.8. Gdyby drużyny były rozróżnialne, w sensie np. ponumerowane kolejnymi numerami $1, \ldots, n$, wówczas takich wyborów byłoby

$$\binom{3n}{3} \cdot \binom{3n-3}{3} \cdot \binom{3n-6}{3} \cdot \ldots \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{(3n)!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Jednak w naszym przypadku drużyny nie są rozróżnialne, a zatem powyższą liczbę należy podzielić przez liczbę permutacji n drużyn, czyli przez $n!$. A zatem szukana liczba to

$$\frac{(3n)!}{6^n \cdot n!}.$$

2.9.

a) Problem równoważny jest wybraniu spośród $n-k+1$ miejsc pomiędzy wolnymi $n-k$ krzesłami (rozłącznych) miejsc do wstawienia k krzeseł. Tym samym szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k}$.

b) W rozwiązaniu do pkt. **a)** należy jeszcze uwględnić dowolną permutację pacjentów przy wyborze tych samych krzeseł, a zatem szukana liczba to $\binom{n-k+1}{k} \cdot k!$.

2.10.

a) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$

b) $\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}$ lub $\binom{60}{3} - \left(\binom{30}{3} + \binom{30}{2} \cdot \binom{30}{1}\right)$

c) $3 \cdot \binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{1}$

2.11. Mając na uwadze, że $\binom{n}{0}\binom{n}{n} = 1$ oraz równość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, lewa strona rozważanego równania przyjmuje postać

$$1 - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] - \cdots + (-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right] + (-1)^n = 0.$$

Zauważmy, że każdy z czynników $\binom{n-1}{k}$, $1 \le k \le n-2$, występuje zarówno ze znakiem '+', jak i '−', a zatem współczynniki te sumują się nawzajem do 0. Pozostaje $1 - \binom{n-1}{0} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} + (-1)^n = 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n$, co oczywiście sumuje się do 0.

2.12. Dla ustalonego $k \geq 0$, kod składa się z k kresek i $n-2k$ kropek, czyli ma $n-k$ elementów. Zatem aby otrzymać pojedynczy kod, wybieramy k elementów będących kreskami. A zatem wszystkich kodów Morse'a długości k jest $\binom{n-k}{k}$. W konsekwencji wszystkich możliwych kodów Morse'a długości n wynosi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$.

2.13. Niech X będzie zbiorem wszystkich niezbalansowanych ciągów (o tej samej liczbie zer i jedynek), a Y zbiorem ciągów długości $2n$, które mają dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer. Zdefniujmy bijekcję[2] $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}^{2n}$, która dla danego niezbalansowanego ciągu $(a_1,\ldots,a_{2n})$ przekształca go w ciąg długości $2n$, który ma dokładnie $n-1$ jedynek i $n+1$ zer, w następujący sposób:

$$f(a_1,\ldots,a_{2n}) = (1-a_1,\ldots,1-a_k,a_{k+1},\ldots,a_{2n}),$$

gdzie k jest najmniejsze takie, że liczba zer w podciągu $(a_1,\ldots,a_k)$ jest mniejsza niż liczba jedynek. Np. dla ciągu niezbalansowanego $(0,1,1,1,0,0)$ mamy $k=3$ oraz $f(0,1,1,1,0,0) = (1,0,0,1,0,0)$. Jako że $|Y| = \binom{2n}{n-1}$, a wszystkich ciągów długości $2n$ z równą liczbą jedynek i zer jest $\binom{2n}{n}$, zatem wszystkich ciągów zbalansowanych długości $2n$ jest $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

[2]Fakt, że tak zdefiniowana funkcja f jest bijekcją, wymaga uzasadnienia.