ZESTAW 1

OZNACZENIA i POJĘCIA WSTĘPNE

ZADANIE 1.1. Oblicz:

a) $\sum_{i=1}^{n}(i \cdot 2^i)$ dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$;

b) $\prod_{i=1}^{4}(2i + 1)$.

ZADANIE 1.2. Sprawdź prawdziwość poniższych równań dla podanych wartości zmiennych, obliczając wartość lewej i prawej strony.

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)n}{2}$ dla $n = 3$ i $n = 6$,

b) $\sum_{k=0}^{2n}(3k - 2) = (2n + 1) \cdot (3n - 2)$ dla $n = 2$ i $n = 3$,

c) $\sum_{i=0, i\in\mathbb{P}}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{8}$ dla $n = 3$ i $n = 4$, gdzie $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb parzystych,

d) $\prod_{1\leq i\leq 5} i^2 = (5!)^2$

e) $\prod_{i\in T} 2(i + 1) = 80$, gdzie $T = \{0, 1, 4\}$.

ZADANIE 1.3. Oblicz:

a) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(i + j)$ oraz $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}(i + j)$;

b) $\sum_{i=1}^{3}\Pi_{j=1}^{3}(j^i)$ oraz $\Pi_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}(j^i)$.

ZADANIE 1.4. Dla $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ oraz uniwersum $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wyznacz:

a) $A \cup B$,
b) $A \cap B$,
c) $A - B$,
d) $B - A$,
e) $A \oplus B$,
f) $A \times B$,
g) $B \times A$,
h) $\overline{A}$ oraz $\overline{\overline{B}}$.

ZADANIE 1.5. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ oraz $U = \mathbb{N}$. Wyznacz:

a) $A \cup B \cup C$,
b) $A \cap B \cap C$,
c) $A - B$,
d) $A \cap (B - C)$,
e) $A \oplus B$,
f) $A \oplus B \oplus C$,
g) $\overline{A} \cap \overline{B}$,
h) $\overline{A \cap B}$.

ZADANIE 1.6. Dla dwóch zbiorów A i B, niech ich *liczebnościową miarą podobieństwa* będzie wartość $|A \cap B|$, natomiast *miarą Jaccard'a* — wartość $\frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$. Wyznacz te miary podobieństwa dla następujących zbiorów: $X = \{\text{czekolada}, \text{orzechy}, \text{ser}\}$, $Y = \{\text{czekolada}, \text{kardamon}, \text{ser}, \text{wiśnie}\}$ oraz $Z = \{\text{czekolada}, \text{ser}\}$.

ZADANIE 1.7. Niech $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i niech $T = \{0, 2, 4\}$.

a) Ile uporządkowanych par należy do zbioru $S \times T$, a ile do zbioru $T \times S$?

b) Wypisz elementy zbioru $\{(m, n) \in S \times T \ : \ m + n = 5\}$.

c) Wypisz i narysuj elementy zbioru $\{(m, n) \in S \times T \ : \ m + n \geq 3\}$.

d) Wypisz elementy zbioru $\{(m, n) \in S \times S \ : \ m + n = 5\}$.

ZADANIE 1.8. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ będzie zbiorem. Co można powiedzieć o nieznanych zbiorach A, B, C i D (najwięcej, co się da, np. które elementy muszą należeć do niego, a które nie mogą), jeśli wiadomo, że:

a) $|S \times A| = 16$ oraz $(1, 2), (3, 4) \in S \times A$?

b) $S \times B = \emptyset$?

c) $S \times C = C \times S$?

d) $(S \times D) \cap (D \times S) = \{(3, 3)\}$?

ZADANIE 1.9. Dane są zbiory $A = \{k \in \mathbb{N} \ : \ k \text{ parzyste } \wedge k \leq 6\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \ : \ 0 \leq n \leq 3\}$, $D = \{m \in \mathbb{N} \ : \ 3 < m < 6\}$.

a) Wypisz wszystkie elementy zbiorów A, C oraz D.

b) Wyznacz elementy zbiorów $A \oplus C$, $A \oplus D$, $D \times B$, $B \times D$, $(D \times B) \cap (B \times D)$.

ZADANIE 1.10. Niech $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ będzie zbiorem indeksów. Dla każdego $t \in T$ określmy zbiór $A_t = \{y \in \mathbb{N}^+ \ : \ y \leq t\}$ i $B_t = \{y \in \mathbb{N}^+ \ : \ y > t\}$, gdzie $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$. Wyznacz:

a) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i B_1, B_2, B_3, B_4, B_5,

b) $\bigcup_{k=3}^{5} A_k$,

c) $\bigcap_{i=1, i \in \mathbb{NP}}^{5} A_i$, gdzie $\mathbb{NP}$ oznacza zbiór liczb nieparzystych,

d) $\bigcup_{j=1}^{4} B_j$,

e) $\bigcap_{i \in T, i \leq 3} B_i$,

f) $\bigcap_{i=1}^{3} (A_i \cup A_{i+1})$,

g) $\bigcup_{k \in T, k \in \mathbb{P}} (A_k \cap B_k)$, gdzie $\mathbb{P}$ oznacza zbiór liczb parzystych,

h) $\bigcap_{k \in T, k \in \mathbb{P}} (A_k \cup B_k)$.

ZADANIE 1.11. Niech $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ będzie zbiorem indeksów. Dla każdego $i \in I$ określmy zbiór $B_i = \{x \in \mathbb{N} \ : \ i \leq x \leq 2i\}$. Wyznacz:

a) $\bigcup_{i \in I} B_i$,

b) $\bigcap_{i \in I} B_i$,

c) $B_1 \oplus B_3 \oplus B_5$,

d) $B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_5$.

ZADANIE 1.12. Wypisz wszystkie podzbiory podanych niżej zbiorów. Ile jest tych podzbiorów?

a) $A = \{a\}$,
b) $B = \{b, c\}$,
c) $C = \{c, d\}$,
d) $D = B \cup C$,
e) $E = B \times C$.