

## II ZESTAW ZADAŃ NA ĆWICZENIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

**Ćwiczenie 0.1.** Wyznaczyć wzór na  $n$ -tą sumę częściową i następnie zbadać zbieżność szeregu:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}; & 5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}; & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right); \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}; & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}; \\
 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2}; & 7. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right); & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}; \\
 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.2.** Wyznaczyć sumy następujących szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left( \frac{3}{4} \right)^n; & 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5} \left( \frac{1}{5} \right)^n; & 5. 5 + \frac{3}{5} + \frac{9}{125} + \frac{27}{625} + \dots; \\
 2. \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left( -\frac{1}{2} \right)^n; & 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{4} \left( -\frac{1}{4} \right)^n; & 6. 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.3.** Pokazać zbieżność następujących szeregów i obliczyć ich sumy:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{4^n}; & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{e}{\pi} \right)^n; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\sin 1)^{2n}}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right); \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{10^n}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+4^n}{4^{2n+2}}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} \right).
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.4.** Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu, wykazać rozbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}; & 3. \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1/n}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{10n+7}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right); & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.5.** Korzystając z równości  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$  i  $\sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$ , zbadać zbieżność szeregów:

$$\begin{array}{ll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}; & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^2+2^2+\dots+n^2}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+2+\dots+n}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1^3+2^3+\dots+n^3}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.6.** Za pomocą kryterium porównawczego zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n}}; & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)}; & 7. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n-n^3}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+n^\pi}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.7.** Za pomocą kryterium porównawczego zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3}; & 9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}; & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(5n)}; & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}; \\
 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3+1}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}; & 11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}; & 15. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right); \\
 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+1}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{1+n^{5/3}}; & 12. \sum_{n=21}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n \ln n}; & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.8.** Za pomocą kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!}; & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!} 2^n; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}}; & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{n!}; & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!} 3^n; \\
 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(4n)!} 9^n; & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{n!}; & 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!3^n}{(2n)!}; \\
 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{5^n}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{(3n+1)!}; & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.9.** Za pomocą kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego (i/lub kryterium porównawczego) zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+4}{2n-1} \right)^n; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+1}{2^n+3^n}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}; & 10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+4}{2n-1} \right)^{n^2}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2n}{3n+1} \right)^n; & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \\
 3. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}; & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \frac{1}{n!}; & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.10.** Z dokładnością do 0,01 obliczyć sumy następujących szeregów:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}; & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}; & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{10^n}; & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}; \\
 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}; & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}; & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4}; & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}.
 \end{array}$$

**Ćwiczenie 0.11.** Znaleźć promień zbieżności i przedział zbieżności każdego z następujących szeregów potęgowych:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$	5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x+3}{3} \right)^n;$	9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$	13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n^2};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$	6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}};$	10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n;$	14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$	7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3};$	11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n \sqrt{n}};$	15. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n} x^n;$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n};$	8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n;$	12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^n;$	16. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2};$