

III ZESTAW ZADAŃ NA ĆWICZENIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Ćwiczenie 0.1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

1. $y = x^{55} - x^{-55}$;
2. $y = 5(x^3 + x + 2)$;
3. $y = 4\sqrt{x} - 5/x$;
4. $y = 2x^{1/4} + 3x^{1/5}$;
5. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2/\sqrt{x^3}$;
6. $y = -3x^{-7} + 2x^8$;
7. $y = (3x^2 - 6)(4x - 1)$;
8. $y = (7x + x^2)(5 + x^5)$;
9. $y = (1/x + 2/x^2)(x^3 + 4)$;
10. $y = (x^2 + 1)/(x - 1)$;
11. $y = (2 + x + x^2)/\sqrt{x}$;
12. $y = (2x + 1)/(x + 2)$;
13. $y = (3 - 4x)/(3 + 4x)$;
14. $y = (x^4 - 1)/(3x^2)$;
15. $y = e^{5x}$;
16. $y = x/e^{2x}$;
17. $y = xe^x - x$;
18. $y = x^3e^{x/3}$;
19. $y = e^x \sin x$;
20. $y = e^{-x} \sin x$;
21. $y = e^x/(1 + e^x)$;
22. $y = (e^x + e^{-x})/2$;
23. $y = \ln x + \log_5 x$;
24. $y = e^{3x} \ln x$;
25. $y = x \ln x - x$;
26. $y = 3^x - x^3$;
27. $y = x/(2 - \operatorname{tg} x)$;
28. $y = (\sin x)/x^2$;
29. $y = (1 + \sin x)/x$;
30. $y = x^2 \sin x \operatorname{tg} x$.

Ćwiczenie 0.2. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

1. $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$,
2. $y = \frac{ax+b}{cx+d} + \frac{x-1}{2x+1}$,
3. $y = (2x^3 + 3x)^{15}$;
4. $y = 5/(3x^3 - 2x + 1)^{10}$;
5. $y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$;
6. $y = \sqrt{x - 1/x}$;
7. $y = 1/(2 + \sqrt{3x+4})$;
8. $y = \sqrt{4x + 2\sqrt{x}}$;
9. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
10. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$;
11. $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$;
12. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
13. $y = x^2\sqrt{5 - x^2}$;
14. $y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)^{10}$;
15. $y = \left(\frac{1 + x^2}{1 + x}\right)^2$;
16. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
17. $y = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/2}$;
18. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-5}}$;
19. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}}}$;
20. $y = 3^x x^3$;
21. $y = e^{x^2}$;
22. $y = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$;
23. $y = e^{e^x}$;
24. $y = x \ln x - x$;
25. $y = 2 \ln \sqrt{x^2 + 2}$;
26. $y = \ln(1 + e^x)$;
27. $y = \ln \ln x$;
28. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;
29. $y = \ln^2 \ln x$;
30. $y = \ln^4 \sin 3x^3$;
31. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$;
32. $y = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x)$;
33. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$;
34. $y = \log_x 2$;
35. $y = \log_x \sin x$;
36. $y = \log_x \cos x$;
37. $y = \log_{\cos x} \sin x$;
38. $y = (1/x)^{\ln x}$;
39. $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;
40. $y = \sin((\pi - x)/2)$;
41. $y = \sin(\pi x^2)$;
42. $y = \sqrt{1 + \cos x}$;
43. $y = \sin(2 \cos x)$;
44. $y = \cos(x + \sin x)$;
45. $y = \sin^2(\pi x/2)$;
46. $y = x \cos x - \sin x$;
47. $y = x \sin x + \cos x$;
48. $y = \sqrt[3]{x} \sin x$;
49. $y = \operatorname{tg} \sqrt{1-x}$;
50. $y = \sin(\cos x)$;
51. $y = \operatorname{tg}(\sin x)$;
52. $y = \sin(x \cos x)$;
53. $y = x \sin \sqrt{x}$;
54. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$;
55. $y = \sin \sqrt{x}/(1 + \cos \sqrt{x})$;
56. $y = (\sin x)/x$;
57. $y = (\operatorname{tg} x)/x$;
58. $y = x/(\sin x + \cos^2 x)$;
59. $y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x}$;
60. $y = \sin(\operatorname{tg} \sqrt{1+x^3})$;
61. $y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\right)^4$;
62. $y = x \arcsin x$;
63. $y = x \arctg x$;
64. $y = (1 + x^2) \arctg x$;
65. $y = \arcsin(1/x)$;
66. $y = \arcsin((2x - 1)/3)$;
67. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
68. $y = \arctg(1/\sqrt{x})$;
69. $y = \arctg x - \arctg(1/x)$;
70. $y = \frac{x}{1+x^2} - \arctg x$;
71. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x + 1/x)}$;
72. $y = \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
73. $y = (\arcsin x^2)^{1/2}$;
74. $y = \arccos(a/\sqrt{a^2 + x^2})$;
75. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a \arcsin(x/a)$;
76. $y = \arccos(\cos x)$;
77. $y = \ln(\arccos x)$;
78. $y = (\cos x)^x - x^{\cos x}$;
79. $y = \sinh(\ln(\log_x x^3))$;
80. $y = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \arctg x$,
81. $y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2 + 2x}}$,
82. $y = x^2 \log_3 x + (\sin 2x)^x$,
83. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x$,
84. $y = (\arcsin x + \arccos x)^{10}$,
85. $y = \arcsin \frac{2}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}$,
86. $y = x \ln(x^2 + 1) + 2 \arctg x$,
87. $y = x \arcsin x/3 + \sqrt{9-x^2}$.

Ćwiczenie 0.3. Napisać równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 , gdy:

1. $y = \sqrt{x^2 - 6x}$, $x_0 = 8$;
2. $y = \frac{1}{x + \sqrt{3x}}$, $x_0 = 3$;
3. $y = \sqrt{1 + 2x^2}$, $x_0 = 2$;
4. $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x_0 = 3$;
5. $y = (1 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = -1$;
6. $y = \frac{2x}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$.

Ćwiczenie 0.4. Obliczyć pochodne drugiego rzędu następujących funkcji:

1. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;
2. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$;
3. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$;
4. $f(x) = e^{1/x}$;
5. $f(x) = \cos^4 x$;
6. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^4$;
8. $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$;
9. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Ćwiczenie 0.5. Z każdego z następujących równań wyznaczyć dy/dx za pomocą x i y :

1. $x^3 + y^3 = 1$;
2. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;
3. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$;
4. $xy - x + 2y = 1$;
5. $x^2 + xy = y^3$;
6. $\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2}{y} + 1$;
7. $x\sqrt{x+y} = 9 - xy$;
8. $x^2 - 2xy + y^3 = 2$;
9. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$;
10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$;
11. $x^2y^2 + x \sin y = 4$;
12. $1 + x = \sin(xy^2)$;
13. $4 \sin x \sin y = 1$;
14. $y \sin(x^2) = x \sin(y^2)$;
15. $\operatorname{tg}(x/y) = x + y$;
16. $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$;
17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$;
18. $\operatorname{tg}(x-y) = y/(1+x^2)$.

Ćwiczenie 0.6. Obliczyć przyrosty wartości funkcji $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$ i różniczkę $df = f'(x) dx$ funkcji f , gdy:

1. $f(x) = x^3 + 4x$, $x = 1$ i $dx = 0,1$;
2. $f(x) = x^3 + 4x$, $x = 1$ i $dx = 0,01$;
3. $f(x) = x^4$, $x = 1$ i $dx = 0,1$;
4. $f(x) = x^{-1}$, $x = 1/2$ i $dx = 0,1$.

Ćwiczenie 0.7. Wyznaczyć różniczkę df funkcji $y = f(x)$:

1. $f(x) = xe^x$;
2. $f(x) = x \cos x$;
3. $f(x) = x^2 \sin 2x$;
4. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$;
5. $f(x) = \ln(1+x^2)$;
6. $f(x) = x/(1+3x)$;
7. $f(x) = 1/(1+x^3)^2$;
8. $f(x) = \sqrt{1+1/x}$;
9. $f(x) = (x + \operatorname{tg} x)^3$.

Ćwiczenie 0.8. Za pomocą linearyzacji obliczyć przybliżone wartości liczb:

1. $\sqrt[3]{1,07}$;
2. $\sqrt{98}$;
3. $\sqrt{102}$;
4. $(2,001)^5$;
5. $\sqrt[3]{28}$;
6. $\sqrt[4]{80}$;
7. $1/1002$;
8. $(8,06)^{2/3}$;
9. $\sin 1^\circ$;
10. $\sin 31^\circ$;
11. $\cos 28^\circ$;
12. $\operatorname{tg} 43^\circ$;
13. $\operatorname{tg}(\pi/4 + 0,01)$;
14. $\sin(\pi/3 + 0,02)$;
15. $\sin(\pi/3 - 0,02)$;
16. $\operatorname{arctg}(1,01)$.

Ćwiczenie 0.9. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \langle -2; 2 \rangle$;
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$;
3. $f(x) = x^{2/3}$, $x \in \langle -2; 3 \rangle$;
4. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 4 \rangle$;
5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in \langle 0,2; 3 \rangle$;
6. $f(x) = |x| - x^3$, $x \in \langle -2; 2 \rangle$;
7. $f(x) = x^2 e^{-5x}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$;
8. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$.

Ćwiczenie 0.10. Wyznaczyć przedziały wklęsłości, przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

1. $f(x) = x^3 - 6x$;
2. $f(x) = 10x^3 - 3x^5$;
3. $f(x) = (3 - x^2)^2$;
4. $f(x) = (x^2 - 4)^3$;
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$;
6. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$;
7. $f(x) = 6(x^2 + 3)^{-1}$;
8. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$;
9. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$;
10. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$;
11. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$;
12. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;
13. $f(x) = \ln^{5/2} x$;
14. $f(x) = e^{-x^2}$;
15. $f(x) = xe^{x/2}$;
16. $f(x) = e^{2x-x^2}$;
17. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$;
18. $f(x) = (x+1)^4 + e^x$;
19. $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$;
20. $f(x) = 2x^2 + \ln x$;
21. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

Ćwiczenie 0.11. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

1. $f(x) = 2x - x^2$;
2. $f(x) = x^4/(x^3 - 8)$;
3. $f(x) = x^3 \ln x$;
4. $f(x) = xe^{-x/2}$;
5. $f(x) = x + \sin x$;
6. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
7. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$;
8. $f(x) = \ln^2 x - \ln x^2$;
9. $f(x) = \arcsin \frac{2}{1+x^2}$;
10. $f(x) = x - \arctg 2x$;
11. $f(x) = x^2 - \ln(2-x^2)$;
12. $f(x) = (x^2 - 4)e^x$;
13. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$;
14. $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$;
15. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 16 \ln x$;
16. $f(x) = 2\arctg x - \ln(x^2+1)$;
17. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$;
18. $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$;
19. $f(x) = x^4 - 2x^2$;
20. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$;
21. $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$.

Ćwiczenie 0.12. Zbadać ekstremum następujących funkcji:

1. $f(x) = x/3 + 3/x$;
2. $f(x) = x^6 - 6x^4$;
3. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$;
4. $f(x) = x/\ln x$;
5. $f(x) = xe^{-x^2}$;
6. $f(x) = 2x - \ln x + 1/x$;
7. $f(x) = -3x^5 + 5x^3$;
8. $f(x) = x^4 - 4x^3$;
9. $f(x) = e^{4x} + e^{-2x}$;
10. $f(x) = (x-1)^3\sqrt{x^2}$;
11. $f(x) = 1/(1+2^{1/x})$;
12. $f(x) = x/(9-x^2)$;
13. $f(x) = (x^3+16)/x$;
14. $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x^2}$;
15. $f(x) = \cos x - \sin x$;
16. $f(x) = \sin^2 x$;
17. $f(x) = x - \sqrt{2} \sin x$;
18. $f(x) = (x^3+x)/(x^4-x^2+1)$;
19. $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$;
20. $f(x) = x^3(x-1)^2$;
21. $f(x) = x(x^2-1)^2$.

Ćwiczenie 0.13. Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala, obliczyć następujące granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^5 - 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 4x}{x^3}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln \cos x}$;
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$;
7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{\sin x}$;
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg} \frac{7}{x}$;
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{2/x} - 1)$;
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{2x} - 1}$;
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 4x + 3}$;
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$;
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;
14. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$;
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg 3x - \pi/2}{\arctg 4x - \pi/2}$;
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}$;
17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\operatorname{arctg} x - \pi)$;
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$;
19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{4/(1+\ln x)}$;
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^x$;
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2+1})^{1/\ln x}$.

Ćwiczenie 0.14. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x)$, gdy:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$;
2. $f(x) = \frac{-x^2+x}{x-3}$;
3. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$;
4. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x$;
5. $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$;
6. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$;
7. $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$;
8. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$;
9. $f(x) = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

Ćwiczenie 0.15. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x)$, gdy:

1. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$;
2. $f(x) = \frac{|x+1|(x^2+x+1)}{x^2}$;
3. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$;
4. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
5. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;
6. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;
7. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$;
8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x+3}$;
9. $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$;
10. $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
11. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;
12. $f(x) = xe^x$.