Nazwisko i imię	Nr albumu	2000 B

1. Wyznaczyć część rzeczywistą liczby $2e^{\pi j/4} + 3e^{\pi j/6}$.

2. Obliczyć wszystkie pierwiastki równania $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 0$.

3. Wskazać wszystkie rozwiązania równania $e^z = 1$.

4. Niech A będzie macierzą kwadratową. Dlaczego $A + A^T$ jest macierzą symetryczną?

5. Rozwiązać równanie macierzowe $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot X - 2X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Czy wektor $\mathbf{x} = 6t^2 - t + 2$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1 = 2t^2 + 1$, $\mathbf{x}_2 = t + 1$ w $R_2[t]$? Dlaczego?

7. Niech $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ będzie bazą przestrzeni V. Pokazać, że wtedy także $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ jest bazą przestrzeni V.

8. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć: (a) wartości własne λ_i macierzy A; (b) wektory własne $\mathbf{v}_i$ macierzy A; (c) macierz C taką, że $D = C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.

9. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $T : R^2 \to R^2$ względem bazy $B = (\mathbf{b}_1), \mathbf{b}_2)$ przestrzeni R^2, gdy $\mathbf{b}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 1))$ i $T(x, y) = (x + y, 2y - x)$ dla $(x, y) \in R^2$.

10. Niech λ będzie wartością własną macierzy A. Pokazać, że $3\lambda + 1$ jest wartością własną macierzy $3A + I$.

11. Rozwiązać równanie $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{ctg} x = e^x$.

12. Rozwiązać równanie $y'' - 3y' + 2y = 30 \sin x$.

13. Wyznaczyć transformatę Laplace'a $L[t^2 e^{-t}]$.

14. Za pomocą transformaty Laplace'a rozwiązać równanie $y'' + 4y' + 4y = 0$, gdy $y(0) = 1$ i $y'(0) = 1$.

15. Układ równań $\dfrac{dx}{dt} - y = t,\ \ x - \dfrac{dy}{dt} = 1$ z warunkami początkowymi $x(0) = 2$ i $y(0) = 1$ rozwiązać na dwa sposoby – przy pomocy transformaty Laplace'a oraz w dowolny inny sposób.