

EGZAMIN PISEMNY ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

1. Dane są zbiory A , B i C . Wykazać, że $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

4

2. Niech R będzie relacją przechodnią w zbiorze X . Wykazać przechodniość relacji R^{-1} , albo wskazać przykład pokazujący, że tak nie musi być.

4

3. Dana jest rodzina $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $A_n = \langle -n; 3 + \frac{1}{n+1} \rangle$ dla $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Formalnie wykazać jedną (i tylko jedną z równości) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = (-\infty; 4)$ i $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \langle 0; 3 \rangle$.

4

4. Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Indukcyjnie wykazać, że $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 + 4n & 8n \\ -2n & 1 - 4n \end{bmatrix}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

4

5. W zbiorze $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ dana jest relacja \leq , gdzie $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x|y$ dla $x, y \in A$.
1. Narysować diagram Hassego częściowego porządku (A, \leq) . 2. Czy para (A, \leq) jest dobrym porządkiem? Dlaczego?
3. Czy (A, \leq) jest liniowym porządkiem? Dlaczego? 4. Co jest elementem najmniejszym (minimalnym, największym, maksymalnym, ograniczeniem dolnym, ograniczeniem górnym) zbioru $B = \{3, 4, 6, 12\}$ w tym porządku? 5. Czy para (B, \leq) jest dobrym porządkiem? Dlaczego?

5

6. Dane są funkcje $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$. Wykazać, że jeśli f i g są injekcjami, to także funkcja $g \circ f: A \rightarrow C$ jest injekcją.

5

7. Przedstawić formalny dowód równoliczności zbiorów $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ i $B = \{1, 5, 9, 13, \dots\}$.

5

8. Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina wykazać równoliczność odcinka otwartego $(1; 5)$ i odcinka domkniętego $\langle 2; 10 \rangle$.

4