

Wszystkie istotne obliczenia i argumenty muszą znaleźć się na tych kartkach.

1. [5] Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej rozwiązać równanie $(\bar{z})^6 = 8z\bar{z}|z|$.

2. [3] Wykazać, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A} \in R_{n \times n}$, to $\lambda^2 - 3\lambda + 4$ jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_n$.

3. [3] Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć najlepszą zależność postaci $y = ax + b$ pomiędzy współrzędnymi x_i oraz y_i punktów $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ i $(4, 0)$.

4. [5] Niech $T : R_{2 \times 2} \rightarrow R_{2 \times 2}$ będzie przekształceniem liniowym takim, że dla każdej macierzy $\mathbf{X} \in R_{2 \times 2}$ jest $T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. (a) Wskazać bazę B przestrzeni $R_{2 \times 2}$. (b) Wyznaczyć macierze $[T]_B$ przekształcenia T . (c) Wyznaczyć bazy przestrzeni $\text{Ker } T$ i $\text{Im } T$. (d) Wyznaczyć wymiary przestrzeni $\text{Ker } T$ i $\text{Im } T$.

5. [5] Metodą Grama-Schmidta wyznaczyć bazę ortogonalną podprzestrzeni $W = \mathcal{L}((1, 2, 2, 1), (1, 1, -5, 7), (1, 0, 0, 0))$ przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)$ na podprzestrzeń W

6. [6] Niech $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V i niech $T: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $T(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ i $T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. (a) Obliczyć $T(-2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2)$. (b) Wykazać, że T jest przekształceniem różnowartościowym. (c) Wyznaczyć $T^{-1}(6\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$. (d) Wyznaczyć macierze $[T]_B$ i $[T]_C$, gdzie $C = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2)$. (e) Wskazać macierz \mathbf{P} taką, że $[T]_C = \mathbf{P}^{-1}[T]_B\mathbf{P}$.

7. [3] Przy pomocy wzorów Cramera wyznaczyć x_4 z układu równań
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$