Nazwisko i imię	Nr albumu	INFORMATYKA, Zestaw A, 27 stycznia 2005	Nr grupy

Wszystkie istotne obliczenia i argumenty muszą znaleźć się na tych kartkach.

1. [2] Dana jest funkcja $(\cdot|\cdot)\colon R^2 \times R^2 \to R$ taka, że $\big((x,y)|(x',y')\big) = 3xx' - 2yy'$ dla każdych wektorów (x,y), (x',y') z przestrzeni R^2. Wyjaśnić, dlaczego funkcja ta nie jest iloczynem skalarnym w przestrzeni R^2.

2. [5] Dane są wektory $\mathbf{x}_1 = (2,2,-1)$, $\mathbf{x}_2 = (4,1,1)$ i $\mathbf{x}_3 = (1,10,-5)$ z przestrzeni R^3 ze standardowym iloczynem skalarnym. (a) Wykazać, że układ $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ jest bazą przestrzeni R^3. (b) Metodą Grama-Schmodta z układu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ utworzyć bazę ortonormalną. (c) Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{x}_3$ na podprzestrzeń $W = \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ($d$) Wektor $\mathbf{x}_3$ przedstawić jako sumę wektorów z przestrzeni W i z przestrzeni $W^\perp$.

3. [5] Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

4. [8] Wpisując TAK albo NIE stwierdź prawdziwość każdego z następujących zdań:

☐ Jeśli układ równań $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie, to macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna.

☐ Układ równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, w którym $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}$ jest wierszowo równoważna macierzy jednostkowej.

☐ Każdy zbiór ortonormalny jest liniowo niezależny.

☐ Jeśli λ jest wartością własną nieosobliwej macierzy $\mathbf{A}$, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy $\mathbf{A}^{-1}$.

☐ Jeśli $T \in L(V,W)$ i wektory $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ są liniowo zależne w przestrzeni V, to wektory $T(\mathbf{b}_1), \ldots, T(\mathbf{b}_n)$ są liniowo zależne w przestrzeni W.

☐ Dla każdej liczby zespolonej z jest $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

☐ Dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ i liczby α jest $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.

☐ Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową i $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} = \mathbf{0}$, to $\det \mathbf{A} = 0$.

5. [5] (a) Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) Wskazać macierz $\mathbf{P}$ taką, że $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ jest macierzą diagonalną. (c) Wyznaczyć $\mathbf{A}^n$ dla $n \in N$. (d) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$.

---

6. [5] Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $T\colon R^3 \to R^3$ względem bazy standardowej E. Wyznaczyć macierz przekształcenia T względem bazy B, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

---

7. [5] Wielomian $\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$. (a) Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $\psi(\lambda) = \lambda^n$ przez $\varphi(\lambda)$. (b) Korzystając z (a) i z twierdzenia Hamiltona obliczyć $\mathbf{A}^n$ (czyli $\psi(\mathbf{A})$).

---

8. [5] Przedstawić i <u>udowodnić</u> jedno istotne twierdzenie algebry liniowej.