Nazwisko i imię	Nr albumu	ELEKTRONIKA, Zestaw B, 26 stycznia 2005	Nr grupy

Wszystkie istotne obliczenia i argumenty muszą znaleźć się na tych kartkach.

1. [5] Dana jest macierz $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_5] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. ($a$) Wyznaczyć rząd macierzy $\mathbf{A}$ i wymiary przestrzeni $R_{\mathbf{A}}$, $C_{\mathbf{A}}$ i $N_{\mathbf{A}}$. (b) Wskazać bazę przestrzeni wierszowej macierzy $\mathbf{A}$. (c) Wskazać bazę przestrzeni kolumnowej macierzy $\mathbf{A}$. (d) Wskazać bazę przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A}$. (e) Wektor $\mathbf{v}_5$ przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$.

2. [5] Dane są macierze $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ($a$) Wyznaczyć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. (b) Korzystając z (a) (lub w inny sposób) wyznaczyć wektor $\mathbf{c} \in C_{\mathbf{A}}$ najbliższy wektorowi $\mathbf{b}$. (c) Obliczyć odległość pomiędzy wektorami $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

3. [5] (a) Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($b$) Wskazać macierz $\mathbf{P}$ taką, że $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ jest macierzą diagonalną. (c) Wyznaczyć $\mathbf{A}^n$ dla $n \in N$. (d) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$.

4. [3] Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $V(x) = x^4 - 10x^3 + 42x^2 - 82x + 65$, gdy $x_1 = 2 - j$ jest jednym z nich.

5. [5] Przekształcenie liniowe $T\colon R^4 \to R^4$ jest takie, że $T(\mathbf{e}_1) = (1,3,1,5)$, $T(\mathbf{e}_2) = (2,5,1,13)$, $T(\mathbf{e}_3) = (1,2,0,8)$ i $T(\mathbf{e}_4) = (2,6,3,12)$, gdzie $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ jest bazą standardową przestrzeni R^4. Wyznaczyć: (a) $\operatorname{Ker} T$ i bazę tej podprzestrzeni; (b) $\operatorname{Im} T$ i $\dim \operatorname{Im} T$; (c) $[T]_E$ oraz $\det [T]_E$.

6. [5] Za pomocą transformaty Laplace'a wyznaczyć rozwiązanie $y(t)$ równania $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-t}$, dla którego $y(0) = y'(0) = 0$.

7. [4] Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y'' - 4y' + 3y = 26e^{3x}$.