

1. Za pomocą kongruencji wykazać, że liczba $123 \cdot 65^n + 61 \cdot 111^n$ jest podzielna przez 23 dla każdej liczby naturalnej n .

3

2. Zbadać pierwszośc liczb $121^5 - 997^2 + 2$ i $2016^5 - 1$.

2

3. Wyznaczyć liczbę całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 75$ takich, że:

- (a) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$;
 (b) $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0, x_6 > 0$;
 (c) $x_1 \geq -1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 2, x_5 \geq 3, x_6 \geq 4$.

3

4. Obliczyć $\varphi(300)$ i następnie za pomocą algorytmu szybkiego potęgowania obliczyć $311^{350} \pmod{300}$.

4

5. Wyznaczyć najmniejsze naturalne rozwiązanie równania $104x \equiv 5 \pmod{313}$.

4

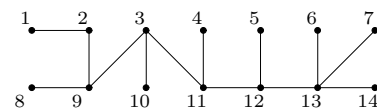
6. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania (x, y) równania $8x + 13y = 5$.

2

7. Indukcyjnie wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 84$ istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 8x + 13y$.

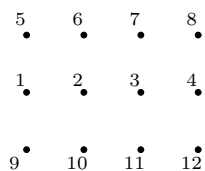
4

8. Wyznaczyć kod Prüfera $C(T)$ podanego drzewa T :



2

9. Wyznaczyć drzewo T , którego kodem Prüfera jest ciąg $C(T) = (1, 2, 6, 3, 4, 8, 4, 12, 10, 11)$.



2

10. Dany jest ciąg rekurencyjny (a_n) , w którym $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 40$ dla $n \geq 2$. Za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na n -ty wyraz ciągu.

6

11. Dany jest ciąg rekurencyjny (a_n) , w którym $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 25 \cdot 2^n$ dla $n \geq 2$. Wyznaczyć jawny wzór na n -ty wyraz ciągu.

6

12. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para $(r, s) = (713, 7)$ (i oni wiedzą, że $r = pq = 23 \cdot 31$). Bolek od Alicji otrzymał informację L , której kodem jest $C = 319$. W roli Bolka wyznaczyć liczbę L .

6

13. Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, \dots, 5000\}$. Niech A_k oznacza zbiór tych liczb ze zbioru A , które są podzielne przez liczbę naturalną k . Korzystając z tego oznaczenia i z metod zliczania, wyprowadzić pełne odpowiedzi na następujące dwa pytania: (a) Ile liczb ze zbioru A jest podzielnych przez 3, 4, 5 lub 6? (b) Ile liczb ze zbioru A jest podzielnych przez 3, 4 lub 5 i nie jest podzielnych przez 6?

6