

1. Wykazać, że $(n, n+3) \leq 3$, gdzie (a, b) jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Wskazać przykłady liczb naturalnych n , m i k pokazujących, że może być $(n, n+3) = 1$, $(m, m+3) = 2$ i $(k, k+3) = 3$.

3

2. Dane są liczby $a = 128$, $b = 180$ i $c = 200$. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik (a, b, c) i liczby całkowite x , y i z , takie że $(a, b, c) = ax + by + cz$.

3

3. Dane są liczby naturalne a , b , c i n . Wykazać, że jeśli $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $(c, n) = 1$, to $a \equiv b \pmod{n}$.

4

4. Wyznaczyć najmniejsze dodatnie rozwiązania układu
$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{2}, \\ x \equiv 12 \pmod{13}, \\ x \equiv 2 \pmod{15}. \end{cases}$$

3

5. Wyznaczyć rozwiązanie równania $155x \equiv 75 \pmod{65}$ należące do zbioru \mathbb{Z}_{65} .

3

6. Obliczyć $\varphi(2015)$ i następnie za pomocą algorytmu szybkiego potęgowania obliczyć $311^{2490} \pmod{2015}$.

4

7. Wyznaczyć ciąg rekurencyjny (a_n) , taki że $a_0 = 5$, $a_1 = 11$, $a_2 = 25$ i $a_n = 11a_{n-1} - 39a_{n-2} + 45a_{n-3}$ dla $n \geq 3$.

6

8. Dany jest ciąg rekurencyjny (a_n) , w którym $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 40$ dla $n \geq 2$. Za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na n -ty wyraz ciągu.

8

9. Indukcyjnie wykazać, że w grafie dwudzielnym $G = (V_1, V_2, E)$ istnieje skojarzenie zbioru V_1 w zbiór V_2 , gdy $|N_G(S)| \geq |S|$ dla każdego podzbioru S zbioru V_1 .

8

10. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para $(r, s) = (391, 9)$ (i tylko oni wiedzą, że $r = pq = 17 \cdot 23$). Bolek od Alicji otrzymał informację L , której kodem jest $C = 197$. W roli Bolka wyznaczyć liczbę L .

8