

1. Za pomocą kongruencji wykazać, że liczba $17 \cdot 109^n + 16 \cdot 65^n$ jest podzielna przez 11 dla każdej liczby naturalnej n .

3

2. Zbadać pierwszośc liczb $3816^3 + 53^2$ i $2105^7 - 1$.

2

3. Wykazać, że w każdym grafie o co najmniej dwóch wierzchołkach istnieją co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

2

4. Zbadać graficzność ciągu $(5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2)$.

3

5. Wyznaczyć najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania $104x \equiv 5 \pmod{317}$.

4

6. Obliczyć $\varphi(300)$ i następnie za pomocą algorytmu szybkiego potęgowania obliczyć $311^{345} \pmod{300}$.

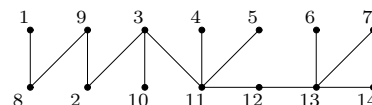
4

7. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 66$ istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 7x + 12y$.

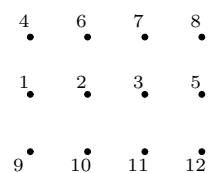
4

8. Wyznaczyć kod Prüfera podanego drzewa T :

2



9. Wyznaczyć drzewo T , którego kodem Prüfera jest ciąg $C(T) = (3, 2, 3, 3, 1, 5, 2, 10, 11, 3)$.



2

10. Dany jest ciąg rekurencyjny (a_n) , w którym $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 20$ dla $n \geq 2$. Za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na n -ty wyraz ciągu.

6

11. Indukcyjnie wykazać, że w grafie dwudzielnym $G = (V_1, V_2, E)$ istnieje skojarzenie zbioru V_1 w zbiór V_2 , gdy $|N_G(S)| \geq |S|$ dla każdego podzbioru S zbioru V_1 .

8

12. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para $(r, s) = (713, 7)$ (i tylko oni wiedzą, że $r = pq = 23 \cdot 31$). Bolek od Alicji otrzymał informację L , której kodem jest $C = 333$. W roli Bolka wyznaczyć liczbę L .

6

13. Wykazać twierdzenie Euklidesa, czyli wykazać, że jeśli a , b i c są liczbami całkowitymi i $a|bc$ oraz $(a, b) = 1$, to $a|c$

4