

---

1. Indukcyjnie wykazać, że liczba  $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$  jest podzielna przez 11 dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

4

---

2. Indukcyjnie wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 18$  istnieją liczby naturalne  $x$  i  $y$  takie, że  $n = 4x + 7y$ .

4

---

3. Która z liczb  $2014^3 + 19$  i  $2014^3 + 97^3$  jest pierwsza? Dlaczego?

4

---

4. Rozwiązać równanie  $139x \equiv 5 \pmod{709}$ , czyli rozwiązać równanie  $139x = 5$  w  $\mathbb{Z}_{709}$ .

4

---

5. Za pomocą algorytmu szybkiego potęgowania obliczyć  $111^{214} \pmod{97}$ .

4

---

6. Wyznaczyć ciąg  $(a_n)$ , w którym  $a_0 = 10/3$ ,  $a_1 = 19/3$  oraz  $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 4^{n-2}$  dla  $n \geq 2$ .

4

---

7. Dany jest ciąg rekurencyjny  $(a_n)$ , w którym  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 5$  i  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3$  dla  $n \geq 2$ . Za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu.

7

---

8. Wykazać, że  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ , gdy  $n, k \in \mathbb{N}$ .

6

---

9. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para  $(r, s) = (1189, 11)$  (i tylko oni wiedzą, że  $r = pq = 29 \cdot 41$ ). Bolek od Alicji otrzymał informację  $L$ , której kodem jest  $C = 669$ . W roli Bolka wyznaczyć liczbę  $L$ .

7

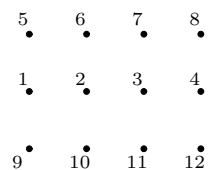
---

10. Wyznaczyć liczbę całkowitych rozwiązań równania  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 60$  takich, że: (a)  $x_1 \geq 1$ ,  $x_2 \geq 2$ ,  $x_3 \geq 3$ ,  $x_4 \geq 4$ ,  $x_5 \geq 5$ ,  $x_6 \geq 6$ ; (b)  $x_1 \geq -1$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 1$ ,  $x_4 \geq 2$ ,  $x_5 \geq 3$ ,  $x_6 \geq -4$ ; (c)  $x_1 < 10$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$ ,  $x_5 \geq 0$ ,  $x_6 \geq 0$ .

4

---

11. Wyznaczyć drzewo  $T$ , którego kodem Prüfera jest ciąg  $C(T) = (6, 1, 2, 2, 7, 8, 4, 3, 4, 4)$ .



2