Nazwisko i imię | Nr albumu | Egzamin 20.02.2008

1. Wyznaczyć liczbę całkowitych rozwiązań $(x_1, \ldots, x_5)$ równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ takich, że: (a) $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_5 \geqslant 0$; (b) $x_1 > 0, \ldots, x_5 > 0$; (c) $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 2, x_4 \geqslant 3, x_5 \geqslant 5$.

2. Wyznaczyć $NWD(1800, 756)$ i liczby całkowite x i y takie, że $NWD(1800, 756) = x \cdot 1800 + y \cdot 756$.

3. Rozwiązać równanie $20x \equiv 101 \pmod{637}$.

4. Rozwiązać równanie rekurencyjne, w którym $a_0 = 2$, $a_1 = 11$ i $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$.

5. Czy implikacja $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p$ jest tautologią?

6. Czy liczba $2^{21} + 1$ jest liczbą pierwszą? Uzasadnić swoje stwierdzenie.

7. Wyznaczyć najmniejsze dodatnie rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 2 \pmod{13}, \\ x \equiv 3 \pmod{21}. \end{cases}$

8. Wyznaczyć wartość liczby $\varphi(90)$. Następnie korzystając z twierdzenia Eulera obliczyć resztę z dzielenia liczby 67^{25} przez 90.

9. Indukcyjnie udowodnić, że $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

10. Czy zachodzi równość $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$? Uzasadnić swoje stwierdzenie.

11. Publicznym kodem Bolka jest para $(r, s) = (1003, 5)$ (i tylko on wie, że $r = pq = 1003 = 17 \cdot 59$). Od znajomej osoby Bolek otrzymał informację L, której kodem jest $C = 102$. W roli Bolka wyznaczyć liczbę L.