Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	11.02.2015	B

1. Każdą z liczb $z_1 = 1 + j$, $z_2 = \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} - j\cos\frac{\pi}{4})$ i $z_3 = 1 + j\sqrt{3}$ zapisać w postaci trygonometrycznej. Następnie obliczyć z_1^{400}, z_2^{200}, z_3^{300} i $\frac{z_1^{400} z_2^{200}}{z_3^{300}}$. 5

2. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = (1 + 2j)x^2 - (4 + 18j)x + (58 + 96j)$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ. (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$. 5

3. Z równania $(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. 5

4. Dane są wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, gdzie $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 3$ i $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|$, $\|2\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x} + 2\mathbf{y})(2\mathbf{x} + \mathbf{y})$ oraz $\cos(\measuredangle(\mathbf{x} + 2\mathbf{y}, 2\mathbf{x} + \mathbf{y}))$. 5

5. Wyznaczyć parabolę $y = ax^2 + bx + c$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(1, 0)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$ i $(-2, 1)$. Napisz równanie tej paraboli! 6

6. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon V \to W$. (1) Podać definicję jądra przekształcenia T. (2) Wykazać, że jądro $\operatorname{Ker} T$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. (3) Wyznaczyć jądro przekształcenia $T\colon R^5 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z, t, u) = (x + y + z + t + u, x + 2y + 3z + 4t, x + y + 3z + t - u)$. (4) Wyznaczyć bazę jądra $\operatorname{Ker} T$. $\boxed{6}$

7. Dane jest przekształcenie $T\colon R^3 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z) = (x+2y+4z, x+3y+6z, 2x+5y+10z)$. (1) Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$, gdy $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ i $C = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, -1, 0))$. (2) Obliczyć $\det [T]_C^B$. (3) Czy T jest monomorfizmem? (4) Czy T jest epimorfizmem? (5) Czy istnieje przekształcenie T^{-1}? Uzasadnić każde swoje stwierdzenie. $\boxed{6}$

8. Za pomocą wzorów Cramera rozwiązać układ równań $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 \phantom{{}+ 2x_2} + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ $\boxed{6}$

9. Wyznaczyć: (a) wielomian charakterystyczny, (b) wartości własne i (c) wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (d) Następnie wektor $\mathbf{v}_0 = (1, -1)$ przedstawić jako kombinację liniową wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$. $\boxed{6}$