Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	30.01.2015	A

1. Dana jest liczba $z = \frac{(1+j)^{400}\left(\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} - j\cos\frac{\pi}{4})\right)^{200}}{(1+j\sqrt{3})^{300}}$. Wyznaczyć jej część rzeczywistą $\mathrm{Re}(z)$ i część urojoną $\mathrm{Im}(z)$. 3

2. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = (1-j)x^2 - (2+4j)x - (7-9j)$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ. (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$. 3

3. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu $x^3 - 11x^2 + (51+6j)x - 65 - 30j$, gdy jednym jego pierwiastkiem jest liczba $5 - 4j$. 3

4. Z równania $(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}+\mathbf{I})\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. 4

5. Dane są wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, gdzie $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 3$ i $\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}+2\mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}+2\mathbf{y})$ oraz $\cos\left(\measuredangle(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}+2\mathbf{y})\right)$. 5

6. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(-1,5)$, $(2,-3)$, $(6,2)$ i $(10,10)$. Napisz równanie tej prostej! 4

7. Dane jest przekształcenie $T\colon R^2 \to R^3$, gdzie $T(x,y) = (x+y, 2x+y, x+2y)$. Wyznaczyć wektor $\mathbf{x}$ taki, że liczba $\|T(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|$ jest najmniejsza z możliwych, gdy $\mathbf{b} = (10, 13, 10)$. $\boxed{6}$

8. Dane jest przekształcenie $T\colon R^3 \to R^3$, gdzie $T(x,y,z) = (x+2y+4z, x+3y+6z, 2x+5y+10z)$. (1) Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$, gdy $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ i $C = ((1,0,0),(0,0,1),(0,-1,0))$. (2) Obliczyć $\det [T]_C^B$. (3) Czy T jest monomorfizmem? (4) Czy T jest epimorfizmem? (5) Czy istnieje przekształcenie T^{-1}? Uzasadnić każde swoje stwierdzenie. $\boxed{6}$

9. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon V \to W$. (1) Podać definicję obrazu przekształcenia T. (2) Wykazać, że obraz $\operatorname{Im} T$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. $\boxed{4}$

10. Pokazać, że jeśli $T\colon V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$. $\boxed{7}$