Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	27.02.2015	C

1. Niech V i W będą podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni R^n. Wykazać, że $V \cap W$ jest podprzestrzenią przestrzeni R^n. 4

2. Czy zbiór $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x \leqslant y \leqslant z\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni R^3? 3

3. Dane są macierze $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (a) Wyznaczyć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. (b) Korzystając z (a) (lub w inny sposób) wyznaczyć wektor $\mathbf{c} \in C_{\mathbf{A}}$ najbliższy wektorowi $\mathbf{b}$. (c) Obliczyć $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|$. 7

4. Dana jest macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. (1) Wyznaczyć jej przestrzeń zerową $N_{\mathbf{A}}$. (2) Wybrać niezerowy wektor $\mathbf{x} \in N_{\mathbf{A}}$ i niezerowy wektor $\mathbf{y} \in R_{\mathbf{A}}$ ($R_{\mathbf{A}}$ jest przestrzenią wierszową macierzy $\mathbf{A}$). (3) Wykazać, że wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ są ortogonalne. 6

5. 1. Zbadać liniową niezależność układu wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, gdzie $\mathbf{v}_1 = (2, 3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, -2, 3)$ i $\mathbf{v}_4 = (1, 5, 4, 1)$. 2. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{v} = (2, 3, 1, 8)$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$. 3. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$. 6

6. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon V \to W$. (1) Podać definicję obrazu przekształcenia T. (2) Wykazać, że obraz $T(V) = \operatorname{Im} T$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. (3) Wyznaczyć obraz przekształcenia $T\colon R^5 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z, t, u) = (x+y+z+t+u, x+2y+3z+4t, x+y+3z+t-u)$ i wskazać jakąkolwiek bazę przestrzeni $\operatorname{Im} T$. (4) Czy T jest monomorfizmem? 6

7. Dane jest przekształcenie $T\colon R^3 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z) = (x+y+z, x+2y+3z, x+3y+6z)$. (1) Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$, gdy $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ i $C = ((1,0,0),(0,0,1),(0,-1,0))$. (2) Obliczyć $\det [T]_C^B$. (3) Czy istnieje przekształcenie T^{-1}? (4) Obliczyć $[T^{-1}]_B^C$ i $[T^{-1}]_B^C \mathbf{y}$, gdy $\mathbf{y} = [1\ 2\ 3]^T$. 6

8. Zbadać dla jakich liczb rzeczywistych k macierz $\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{bmatrix}$ jest odwracalna. Wyznaczyć $(\frac{1}{2}\mathbf{A}(3))^{-1}$. 4

9. Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są odwracalnymi macierzami o wymiarach $n \times n$. Wpisując TAK albo NIE, stwierdzić, które z następujących zdań zawsze jest prawdziwe: (1) $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}) = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^2$ $\boxed{}$; (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ $\boxed{}$; (3) $\mathbf{A}^2$ jest odwracalna i $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$ $\boxed{}$; (4) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ jest odwracalna i $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ $\boxed{}$; (5) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ $\boxed{}$; (6) $\mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$ $\boxed{}$; (7) $\mathbf{ABA}^{-1} = \mathbf{B}$ $\boxed{}$; (8) $(\mathbf{ABA}^{-1})^3 = \mathbf{AB}^3\mathbf{A}^{-1}$ $\boxed{}$; (9) $(\mathbf{I}_n + \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}^{-1}) = 2\mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}$ $\boxed{}$; (10) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ jest odwracalna i $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{AB}^{-1}$ $\boxed{}$. 3