Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	23.02.2015	C

1. Każdą z liczb $z_1 = 1 - j$, $z_2 = -1 + j\sqrt{3}$ i $z_3 = 2j^{123}$ zapisać w postaci trygonometrycznej. Następnie obliczyć $\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right)^{12}$. 5

2. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 - 11x^2 + (51 + 6j)x - 65 - 30j$, wiedząc, że $5 - 4j$ jest jednym z nich. Przedstawić swoje obliczenia. 5

3. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(1, 0)$, $(2, -3)$, $(3, 0)$ i $(-2, 1)$. Napisz równanie tej prostej! Czy punkt $(1, 1)$ leży na tej prostej? Dlaczego? 5

4. Wyznaczyć przestrzeń zerową i bazę przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. 5

5. 1. Zbadać liniową niezależność układu wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, gdzie $\mathbf{v}_1 = (2, 3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, -2, 3)$ i $\mathbf{v}_4 = (1, 5, 4, 1)$. 2. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{v} = (2, 3, 1, 8)$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$. 3. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$. 6

6. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon V \to W$. (1) Podać definicję obrazu przekształcenia T. (2) Wykazać, że obraz $T(V) = \operatorname{Im} T$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. (3) Wyznaczyć obraz przekształcenia $T\colon R^5 \to R^3$, gdzie $T(x,y,z,t,u) = (x+y+z+t+u, x+2y+3z+4t, x+y+3z+t-u)$. (4) Wyznaczyć bazę obrazu $\operatorname{Im} T$. 6

---

7. Dane jest przekształcenie $T\colon R^3 \to R^3$, gdzie $T(x,y,z) = (2x+5y+10z, x+2y+4z, x+3y+6z)$. (1) Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$, gdy $B = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ i $C = ((1,0,0),(0,0,1),(0,-1,0))$. (2) Obliczyć $\det [T]_C^B$. (3) Czy T jest monomorfizmem? (4) Czy T jest epimorfizmem? (5) Czy istnieje przekształcenie T^{-1}? Uzasadnić każde swoje stwierdzenie. 6

---

8. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$ 6

---

9. Wyznaczyć: (a) wielomian charakterystyczny, (b) wartości własne i (c) wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 6