Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI) | Nr albumu | 28.02.2014 | C

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Rozwiązać równanie macierzowe $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}^{T}$. 5

2. Wyznaczyć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Następnie wskazać wektor z przestrzeni $C_{\mathbf{A}}$ leżący najbliżej wektora $\mathbf{b}$. 5

3. Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia 3 i $\det A = 2$. Wyznaczyć $\det(A^2)$, $\det(5A)$, $\det(2A^T)$ i $\det((1+j)^3 A^{-1})$. 5

4. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = (1-2j)x^2 + (8-j)x + 5 + 5j$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ. (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$. 5

5. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$. ($a$) Znaleźć bazę przestrzeni $S = \{\mathbf{x} \in R^5 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ rozwiązań układu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (b) Uzasadnić, że układ niejednorodny $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma rozwiązanie. (c) Wskazać jakiekolwiek rozwiązanie szczególne układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (d) Przedstawić rozwiązanie ogólne układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jako sumę rozwiązania ogólnego układu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i twojego rozwiązania szczególnego układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. $\boxed{5}$

6. (a) Pokazać, że wektory $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 5, 3)$ i $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 10)$ tworzą bazę przestrzeni R^3. (b) Niech $T : R^3 \to T^2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $T(\mathbf{b}_1) = (1, 0)$, $T(\mathbf{b}_2) = (1, 1)$ i $T(\mathbf{b}_3) = (1, 2)$. Wyznaczyć $T(\mathbf{v})$, gdy $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. (c) Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$ przekształcenia T względem baz standardowych B i C przestrzeni R^3 i R^2. $\boxed{5}$

7. Dane jest przekształcenie $T : R^3 \to R^3$, gdzie $T(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 5x_2 - 20x_3, 2x_1 + 8x_3, 2x_1 + x_2 + 7x_3)$ dla $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$. (a) Wykazać, że jest to przekształcenie liniowe. (b) Napisać macierz A tego przekształcenia względem bazy kanonicznej przestrzeni R^3. (c) Znaleźć wartości własne macierzy A. (d) Znaleźć wektory własne macierzy A. (e) Znaleźć macierz C taką, że $D = C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną. (f) Obliczyć CD^4C^{-1}. $\boxed{5}$