Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	22.02.2014	B1

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Rozwiązać (jeśli to możliwe) równanie $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 9 & 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & 18 \\ 54 & 90 \end{bmatrix}$. **3**

2. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = x^2 + (-13 + j)x + 44 - 8j$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ. (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$. **3**

3. Liczba $1+4j$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^5 - 11x^4 + 60x^3 - 220x^2 + 459x - 289$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki wielomianu. Przedstawić obliczenia. **2**

4. Z równania $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{X} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$ wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. **4**

5. Wskazać bazę przestrzeni kolumnowej i bazę przestrzeni zerowej macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **4**

6. Dane są wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, gdzie $\|\mathbf{x}\| = 3$, $\|\mathbf{y}\| = 1$ i $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} - 5\mathbf{y}\|$ i $(\mathbf{x} + 2\mathbf{y})(\mathbf{x} - 5\mathbf{y})$. **4**

7. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\boxed{4}$

8. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(1, 1)$, $(2, -4)$, $(4, 1)$, $(5, 3)$ i $(7, -1)$. $\boxed{4}$

9. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$. Wyznaczyć macierz diagonalną Λ i macierz odwracalną $\mathbf{P}$ taką, że $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$. Następnie wyznaczyć $\mathbf{A}^n$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. $\boxed{6}$

10. Macierzą przekształcenia liniowego $T\colon R^3 \to R^3$ względem bazy $B = \big((1, 2, 3),\ (2, 3, 1), (4, 5, 2)\big)$ jest macierz $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (1) Wykazać, że T jest odwracalne. (2) Wyznaczyć $[T^{-1}]_B$. (3) Wyznaczyć macierze $[T]_C$ i $[T^{-1}]_C$, gdy $C = \big((1, 2, 3),\ (0, 1, 2),\ (0, 0, 1)\big)$. (4) Dany jest wektor $\mathbf{x}$ taki, że $[\mathbf{x}]_B = (1, 1, 1)$. Wyznaczyć $\mathbf{x}$, $[T(\mathbf{x})]_B$ i $[T(\mathbf{x})]_C$. $\boxed{6}$