

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Liczbę w zapisać w postaci $a + jb$, gdy $\frac{1}{w} = \frac{1}{1+3j} + \frac{1}{1-2j}$. Wyznaczyć też $w\bar{w}$, $|\frac{1}{w}|$, $\overline{(\frac{1}{w})}$ i $|\frac{1}{\bar{w}}|$.

3

2. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = (2+j)x^2 + (10-5j)x - 63 + 91j$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ . (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$.

2

3. Liczba $1+4j$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^5 - 9x^4 + 40x^3 - 120x^2 + 119x + 289$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki wielomianu. Przedstawić obliczenia.

3

4. Z równania $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathbf{X} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^T = \mathbf{B}^{-1}$ wyznaczyć macierz \mathbf{X} , gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

4

5. Sprawdzić, czy $S = \{\mathbf{X} \in R_{2 \times 2} : \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $R_{2 \times 2}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2

6. Dane są wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} , gdzie $\|\mathbf{x}\| = 3$, $\|\mathbf{y}\| = 5$ i $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć $\|\mathbf{x}+2\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}-5\mathbf{y}\|$, $(\mathbf{x}+2\mathbf{y})(\mathbf{x}-5\mathbf{y})$ i $\angle(\mathbf{x}+2\mathbf{y}, \mathbf{x}-5\mathbf{y})$.

3

7. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3

8. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(1, 2)$, $(2, -3)$, $(4, 2)$, $(5, 4)$ i $(7, 0)$.

3

9. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy \mathbf{A} . Wyznaczyć macierz diagonalną Λ i macierz odwracalną \mathbf{P} taką, że $\mathbf{A} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$. Następnie wyznaczyć \mathbf{A}^n , gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

6

10. Macierzą przekształcenia liniowego $T: R^3 \rightarrow R^3$ względem bazy $B = ((1, 2, 3), (2, 3, 1), (4, 5, 2))$ jest macierz $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (1) Wykazać, że T jest odwracalne. (2) Wyznaczyć $[T^{-1}]_B$. (3) Wyznaczyć macierze $[T]_C$ i $[T^{-1}]_C$, gdy $C = ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1))$. (4) Dany jest wektor \mathbf{x} taki, że $[\mathbf{x}]_B = (1, 1, 1)$. Wyznaczyć \mathbf{x} , $[T(\mathbf{x})]_B$ i $[T(\mathbf{x})]_C$.

6