Nazwisko i imię (DRUKOWANYMI LITERAMI)	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	Data egzaminu	A

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Liczbę $z = \sqrt{3} + j$ zapisać w postaci $r(\cos t + j \sin t)$. W tej samej postaci zapisać liczby: (1) z^2; (2) z^3; (3) $1/z$; (4) $\overline{z}$; (5) $z/\overline{z}$. 3

2. Dany jest wielomian stopnia drugiego $w(x) = (1-2j)x^2 - (4+7j)x + 95 + 15j$. (1) Obliczyć wyróżnik Δ. (2) Obliczyć $\sqrt{\Delta}$. (3) Rozwiązać równanie $w(x) = 0$. 2

3. Liczba $3 + j$ jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x - 20$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki wielomianu. Przedstawić obliczenia. 3

4. Z równania $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^T(\mathbf{X} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}$ wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. 4

5. Sprawdzić, czy $S = \{(x, y, z) \in R^3 \colon (3x - y + z, x + y + z) = (1, 2)\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni R^3. 2

6. Dane są wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, gdzie $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\|\mathbf{y}\| = 2$ i $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć $\|3\mathbf{x} - 5\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} + 3\mathbf{y}\|$, $(3\mathbf{x} - 5\mathbf{y})(\mathbf{x} + 3\mathbf{y})$ i $\measuredangle(3\mathbf{x} - 5\mathbf{y}, \mathbf{x} + 3\mathbf{y})$. 3

7. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 3

8. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która w sensie metody najmniejszych kwadratów najlepiej pasuje do punktów $(-1, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 5)$ $(4, 0)$ i $(5, 5)$. 3

9. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$. Wyznaczyć macierz diagonalną Λ i macierz odwracalną $\mathbf{P}$ taką, że $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$. Następnie wyznaczyć $\mathbf{A}^n$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. 6

10. Dane jest przekształcenie $T\colon R^4 \to R^3$, gdzie $T(x, y, z, t) = (x+y-z+2t, x+y+z+t, 3x+2z-t)$. Wyznaczyć macierz $[T]_C^B$, gdy $B = ((2, 2, 3, 1), (2, -1, 1, 3), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1))$ i $C = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$. Sprawdzić, czy $\mathbf{x} = (0, -3, 1, 2) \in \operatorname{Ker} T$. Czy T jest monomorfizmem? Dlaczego? Czy $\mathbf{y} = (1, -1, -2) \in \operatorname{Im} T$? Dlaczego? 6