Nazwisko i imię	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	Data egzaminu	B

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 - (10 - 4j)x + 45 - 10j = 0$.

2. W przestrzeni Euklidesa dane są wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, takie że $\mathbf{xy} = 10$, $\mathbf{xz} = -2$, $\mathbf{yz} = 3$, $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 4$ i $\|\mathbf{z}\| = 5$. Obliczyć: (a) $\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z})$; (b) $(\mathbf{x} + 2\mathbf{y})\mathbf{z}$; (c) $\mathbf{z}(\mathbf{y} - 10\mathbf{z})$; (d) $3(\mathbf{x} - 2\mathbf{y})(\mathbf{z} + \mathbf{x})$; (e) $\|\mathbf{x} + 3\mathbf{z}\|$.

3. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ oraz utworzyć macierz $\mathbf{P}$, taką że $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ jest macierzą diagonalną, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

4. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon R^3 \to R^3$, takie że $T(-1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $T(1, -1, 1) = (3, 2, 1)$ i $T(1, 1, -1) = (1, 1, 1)$. Wyznaczyć $T(x, y, z)$ dla $(x, y, z) \in R^3$. Następnie wyznaczyć $T(1, 1, 1)$.

5. Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $T\colon R^3 \to R^3$ względem bazy standardowej $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ przestrzeni R^3, jeśli $T(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ dla $i = 1, 2, 3$, gdy $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)$.

6. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$

7. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która najlepiej pasuje do punktów $(1, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 8)$, $(4, 10)$, $(5, 11)$.

8. Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. (a) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny $\varphi(x)$ macierzy $\mathbf{A}$. (b) Korzystając z równości $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, wyznaczyć $\mathbf{A}^{-1}$. (c) Korzystając z reszty z dzielenia wielomianu $\psi(x) = x^7 - 2x^4$ przez $\varphi(x)$, wyznaczyć $\mathbf{A}^7 - 2\mathbf{A}^4$.