Nazwisko i imię	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	Data egzaminu	A

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 - (3+3j)x + 30 - j = 0$.

2. Niech $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ będą wektorami z przestrzeni Euklidesa, takimi że $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = -3$, $(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = 2$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\|\mathbf{y}\| = 2$ i $\|\mathbf{z}\| = 3$. Obliczyć: (a) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{y}+\mathbf{z})$; (b) $(\mathbf{x}-\mathbf{y}+3\mathbf{z}|2\mathbf{x}+\mathbf{y})$; (c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$; (d) $\|\mathbf{x}-2\mathbf{y}+4\mathbf{z}\|$.

3. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ oraz utworzyć macierz $\mathbf{P}$, taką że $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ jest macierzą diagonalną, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon R^3 \to R^3$, takie że $T(-1,1,1) = (3,5,7)$, $T(1,-1,1) = (3,0,1)$ i $T(1,1,-1) = (1,2,3)$. Wyznaczyć $T(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in R^3$. Następnie wyznaczyć $T(1,1,1)$.

5. Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $T\colon R^3 \to R^3$ względem bazy standardowej $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ przestrzeni R^3, jeśli $T(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ dla $i = 1, 2, 3$, gdy $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)$.

---

6. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 2. \end{cases}$

---

7. Wyznaczyć prostą $y = ax + b$, która najlepiej pasuje do punktów $(1, 4)$, $(4, 24)$, $(5, 30)$, $(8, 32)$, $(12, 36)$.

---

8. Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$. (a) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny $\varphi(x)$ macierzy $\mathbf{A}$. (b) Korzystając z równości $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, wyznaczyć $\mathbf{A}^{-1}$. (c) Korzystając z reszty z dzielenia wielomianu $\psi(x) = x^7 - 2x^4$ przez $\varphi(x)$, wyznaczyć $\mathbf{A}^7 - 2\mathbf{A}^4$.