Nazwisko i imię	Nr albumu	Kierunek studiów	Rok studiów	Data egzaminu	D

EGZAMIN PISEMNY Z ALGEBRY LINIOWEJ

1. Wyznaczyć wszystkie trzy pierwiastki równania $x^3 + (1 + 2j)x^2 + (25 + 36j)x - 27 - 38j = 0$.

2. Wyznaczyć $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny $\varphi(\lambda)$, wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$. Następnie utworzyć macierz $\mathbf{P}$, taką że $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ jest macierzą diagonalną $\mathbf{\Lambda}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Fizyk francuski Jacques Charles (1746-1823) zaobserwował, że objętość gazu utrzymywanego pod stałym ciśnieniem rośnie liniowo wraz ze wzrostem temperatury. W niżej przedstawionej tabeli zaprezentowaliśmy mierzoną w litrach objętość V jednego mola wodoru utrzymywanego pod ciśnieniem jednej atmosfery w zależności od temperatury T mierzonej w stopniach Celsjusza:

T	-20	0	20	40
V	20,8	22,4	24,1	25,7

. Wyznaczyć zależność liniową $V = aT + b$, która, w sensie metody najmniejszych kwadratów, najlepiej pasuje do podanych wielkości. Następnie wyznaczyć przybliżoną wartość zera absolutnego, czyli wyznaczyć temperaturę T, przy której $V = 0$.

5. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon R^3 \to R^3$, takie że $T(1,1,2) = (1,2,3)$, $T(1,2,1) = (3,4,1)$ i $T(2,1,1) = (2,2,-2)$. Wyznaczyć $T(x,y,z)$ dla $(x,y,z) \in R^3$. Dodatkowo wyznaczyć $T(1,5,9)$ i $T(T(1,5,9))$.

---

6. Dane jest przekształcenie liniowe $T\colon R^3 \to R^3$, takie że $T(x,y,z) = (x - 2y + 4z, 3x, -3y + 2z)$. Wyznaczyć macierz $[T]_B$ przekształcenia liniowego T względem bazy $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ przestrzeni R^3, gdzie $\mathbf{b}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,-1,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,-5,3)$. Wyznać też $\det [T]_B$, $\dim \operatorname{Ker} T$ i $\dim \operatorname{Im} T$.

---

7. Znaleźć najlepsze rozwiązanie sprzecznego układu równań $\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} = 1, \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

---

8. Niech $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ będą wektorami z przestrzeni Euklidesa, takimi że $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 5$, $(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = 4$, $(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = 3$, $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 1$ i $\|\mathbf{z}\| = 4$. Obliczyć: (a) $(\mathbf{x} + 2\mathbf{y}|3\mathbf{y} - 4\mathbf{z})$; (b) $(\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{x} + \mathbf{y})$; (c) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$; (d) $\measuredangle(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z})$.