

Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

Znaleźć rozwiązanie ogólne każdego z następujących równań liniowych jednorodnych (1)–(8).

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $y'' - 3y' - 4y = 0$. | $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$ |
| 2. $y'' + 3y' - 10y = 0$. | $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}$ |
| 3. $y'' - 6y' + 9y = 0$. | $y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$ |
| 4. $4y'' - 4y' + y = 0$. | $y = e^{x/2}(c_1 + c_2 x)$ |
| 5. $y'' - 4y' + 13y = 0$. | $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ |
| 6. $y'' + 2y' + 5y = 0$. | $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ |
| 7. $2y'' - 2y' + 3y = 0$. | $y = e^{x/2}(c_1 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x)$ |
| 8. $4y'' + y = 0$. | $y = c_1 \cos(x/2) + c_2 \sin(x/2)$ |

Dla każdego z równań (9)–(12) znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające podane warunki początkowe.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 9. $y'' + 3y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$. | $y = e^x$ |
| 10. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$. | $y = (1 + 3x)e^{-2x}$ |
| 11. $y'' - 4y' + 20y = 0, y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 1$. | $y = -\frac{1}{4}e^{2x-\pi} \sin 4x$ |
| 12. $y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4$. | $y = e^x(2 \cos 2x + \sin 2x)$ |

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań liniowych niejednorodnych (13)–(30).

- | | |
|---|---|
| 13. $y'' - y = 3x^2 - 7x + 9$. | $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - 3x^2 + 7x - 15$ |
| 14. $y'' - y' = -4x^3 + 12x^2 + 2x + 2$. | $y = c_1 + c_2 e^x + x^4 - x^2 - 4x$ |
| 15. $y'' + y' - 6y = 12e^{3x}$. | $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + 2e^{3x}$ |
| • $y'' + 4y' + 3y = 30e^{2x}$, | $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 2e^{2x}$ |
| 16. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x}$. | $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (2x - 3)e^{3x}$ |
| 17. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$. | $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 2x^2 e^{-x}$ |
| 18. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{2x}$. | $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (x^2 - 2x)e^{2x}$ |
| • $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}$; | $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + 2xe^{-x}$ |
| 19. $y'' + 4y' + 4y = 6xe^{-2x}$. | $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^3 e^{-2x}$ |

- $y'' + 4y' + 4y = 9e^x$; $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x} + e^x$
- $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$; $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2xe^x$
- 20. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + 3x^2e^{-2x}$
- $y'' - 6y' + 9y = 6e^{3x}$; $y = (c_1 + c_2x + 3x^2)e^{3x}$
- 21. $y'' - 4y' + 3y = -\cos 2x + 8\sin x$. $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \cos 2x$
- 21. $y'' - 4y' + 3y = 27x^3$. $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 9x^3 + 36x^2 + 54x + 48$
- $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$; $y = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\sin 2x - 4\cos 2x + \sin 2x$
- $y'' + 4y = 6\cos x$; $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos x$
- 22. $y'' + 5y' + 6y = -90\cos 4x + 20\sin 4x$. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + \cos 4x - 4\sin 4x$
- $y'' - 2y' + 10y = 6e^x\sin 3x$; $y = (c_1\cos 3x + c_2\sin 3x - x\cos 3x)e^x$
- 23. $y'' + 4y = 8\cos 2x$. $y = c_1\cos 2x + (c_2 + 2x)\sin 2x$
- 24. $2y'' + y = \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$. $y = c_1\cos \frac{x}{\sqrt{2}} + (c_2 + x)\sin \frac{x}{\sqrt{2}}$
- 25. $y'' + y = 4x\sin x$. $y = (c_1 - x^2)\cos x + (c_2 + x)\sin x$
- 26. $y'' + 4y = 32x\sin 2x$. $y = (c_1 - 4x^2)\cos 2x + (c_2 + 2x)\sin 2x$
- 27. $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 18e^x$. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + 2x^2 - 4x + 3 + 2e^x$
- 28. $y'' - 3y' + 2y = 30\sin x$. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 9\cos x + 3\sin x$
- 29. $y'' - 3y' + 2y = 4x^2 + 3e^{2x}$. $y = c_1e^x + (c_2 + 3x)e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$
- 30. $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{2x} + 10\sin x$. $y = c_1e^x + (c_2 + x^2 - 2x)e^{2x} + 3\cos x + \sin x$
- $y'' - 2y' + 10y = 40e^{-x}\cos 3x$; $y = e^x(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$
- $y'' + 4y = 6\cos x - 2\sin 2x$; $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos x + x\cos 2x$
- $y'' + 5y' + 6y = 12$; $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + 2$
- $y'' + 9y = 9$; $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + 1$
- $y'' - y' - 2y = 10\sin x$; $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \cos x - 3\sin x$
- $y'' - 2y' + y = 2e^x$; $y = (c_1 + c_2x + x^2)e^x$
- $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$; $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - xe^{-2x}$
- $y'' - 4y' + 4y = 4x + e^x$; $y = (c_1x + c_2)e^{2x} + x + 1 + e^x$

$$\bullet y'' - 5y' + y = 5; \quad y = c_1 + c_2 e^{5x} - x$$

W zadaniach (31)–(34) znaleźć rozwiązania szczególne spełniające podane warunki początkowe.

$$31. y'' - y' - 2y = 5 \sin x, y(0) = 1, y'(0) = -1. \quad y = \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2} \sin x$$

$$32. y'' + 9y = 8 \cos x, y(\pi/2) = -1, y'(\pi/2) = 1. \quad y = \frac{2}{3} \cos 3x + \sin 3x + \cos x$$

$$33. y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 2. \quad y = 3e^{2x} - 3e^x + e^{-x}$$

$$34. y'' - 5y' + 6y = e^x(2x - 3), y(0) = 1, y'(0) = 3. \quad y = e^{2x} + xe^x$$

$$\bullet y'' + 4y' + 3y = 4e^{-x}, y(0) = 5, y'(0) = -9; \quad y = 3e^{-3x} + 2e^{-x} + 2xe^{-x}$$

$$\bullet y'' - 6y' + 9y = 6e^{3x}, y(0) = 0, y'(0) = 1. \quad y = xe^{3x} = 3x^2 e^{3x}$$

Metodą uzmienniania stałych znaleźć rozwiązania ogólne równań (35)–(40).

$$35. y'' + y = \operatorname{tg} x. \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln(1/\cos x + \operatorname{tg} x)$$

$$36. y'' + y = \operatorname{ctg} x. \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln(1/\sin x - \operatorname{ctg} x)$$

$$37. y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x. \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^{-x}(2 \ln x - 3)$$

$$38. y'' + 2y' + y = e^x \ln x. \quad y = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{4}x^2 e^x(2 \ln x - 3)$$

$$39. y'' + 2y' + y = e^{-x}/x. \quad y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + x \ln x)$$

$$40. y'' - 3y' + 2y = \cos e^{-x}. \quad y = c_1 e^x + (c_2 - \cos e^{-x})e^{2x}$$

W zadaniach (41)–(46) znaleźć rozwiązania ogólne równań jednorodnych.

$$41. y''' + 3y'' - y' - 3y = 0. \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$$

$$42. y''' + 2y'' - 9y' - 18y = 0. \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$$

$$43. y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0. \quad y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x} + c_4 e^{2x}$$

$$44. y''' - 3y' - 2y = 0. \quad y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 e^{2x}$$

$$45. y^{(4)} + 4y''' + 7y'' - 4y' - 8y = 0. \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + e^{-2x}(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$$

$$46. y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0. \quad y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin x$$

W zadaniach (47)–(50) znaleźć rozwiązania ogólne równań niejednorodnych.

$$47. y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - x^2 - 4x + 13. \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + x^3 + x^2 + 5x + 8$$

$$48. y''' + y'' - 4y' - 4y = 4x^2 + 8x - 10. \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} - x^2 + 2$$

$$49. y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 18e^x. \quad y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{4x} - 3x^2 e^x$$

50. $y^{(4)} - 16y = 64 \cos 2x + 32 \sin 2x$.

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + (c_3 + x) \cos 2x + (c_4 - 2x) \sin 2x$$

W zadaniach (51)–(58) znaleźć rozwiązania ogólne układu równań.

51. $\frac{dx}{dt} = -x^2, \frac{dy}{dt} = -y.$ $x^{-1} = t + c_1, y = c_2 e^t$

52. $\frac{dx}{dt} = 3e^{-t}, \frac{dy}{dt} = x + y.$ $x = -3e^{-t} + c_1, y = \frac{3}{2}e^{-t} - c_1 + c_2 e^t$

53. $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 3x + 2t, \frac{dz}{dt} = x + 4y + t.$ $x = t^2 + c_1, y = t^3 + t^2 + 3c_1 t + c_2.$

54. $\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = (x - y)/t.$ $x = e^t + c_1, y = e^t/t + c_1 + c_2/t$

55. $\frac{dx}{dt} = x + \sin t, \frac{dy}{dt} = t - y.$ $x = c_1 e^t - (\sin t + \cos t)/2, y = t - 1 + c_2 e^{-t}$

56. $\frac{dx}{dt} = 3x + 2e^{3t}, \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3y = \sin 2t.$
 $x = (2t + c_1)e^{3t}, y = -(3 \sin 2t + 2 \cos 2t)/13 - (3t^2 + 3c_1 t + 2t + c_2)e^{3t}$

57. $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$ $x = (c_1 t + c_2)e^t, y = (c_1(t + 1) + c_2)e^t$

58. $3\frac{dx}{dt} + 3x + 2y = e^t, 4x - 3\frac{dy}{dt} + 3y = 3t.$
 $x = c_1 e^{t/3} + c - 2e^{-t/3} - 6t, y = -2c_1 e^{t/3} - c_2 e^{-t/3} + e^t/2 + 9t + 9$