

## RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

1. Znaleźć całki ogólne następujących równań:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $y' = (x - 1)/(y + 1)$ ;                    | (i) $(e^{x-y} - e^{-y}) dx + (e^{x+y} + e^x) dy = 0$ ;                         |
| (b) $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$ ;                | (j) $\sin \phi dr - \sqrt{r^2 - 4} \cos \phi d\phi = 0$ ;                      |
| (c) $(y - 1)^2 dx + (1 - x)^2 dy = 0$ ;         | (k) $\sin^2 y \operatorname{ctg} x dx + \cos^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$ ; |
| (d) $y'y(x^2 - 1) = 1$ ;                        | (l) $(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x})y' - y = 0$ ;                                      |
| (e) $x\sqrt{9 - y^2} dx - y(4 + x^2) dy = 0$ ;  | (m) $(1 + x^2)y' = xy - y\sqrt{1 + x^2}$ ;                                     |
| (f) $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$ ; | (n) $(1 + x^2)yy' + 1 = y^2$ ;   |
| (g) $\ln x \sin^2 y dx + x \cos y dy = 0$ ;     | (o) $y' = y \ln y / (\sqrt{1 - x^2} \arcsin x)$ ;                              |
| (h) $(xy^2 - y^2) dx - (x^2y + x^2) dy = 0$ ;   | (p) $(x + 2)(y^2 + 1) dx + (y^2 - x^2y^2) dy = 0$ .                            |

2. Znaleźć całki szczególne następujących równań spełniające podane warunki początkowe:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $3x\sqrt[3]{y} dx + (1 - x^2) dy = 0, y(0) = 0$ ;        | (d) $y'e^{-x} = x - 1, y(1) = -e$ ;                     |
| (b) $y dx - (4 + x^2) \ln y dy = 0, y(2) = 1$ ;              | (e) $y'(x + \sqrt{x}) = \sqrt{1 - y}, y(0) = 1$ ;       |
| (c) $\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0, y(0) = \pi/4$ ; | (f) $y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0, y(0) = 1$ . |

3. Znaleźć całki ogólne następujących równań jednorodnych:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y' = 2 + \frac{y}{x}$ ;               | (h) $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$ ;               |
| (b) $y' = y/x + y^2/x^2$ ;                 | (i) $y' = (x^2 + y^2)/(2xy)$ ;                    |
| (c) $(x + y) dx + 2x dy = 0$ ;             | (j) $(xy' - y) \sin \frac{y}{x} = x$ ;            |
| (d) $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$ ;  | (k) $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$ ;               |
| (e) $(4x^2 - 3xy - y^2) dx - x^2 dy = 0$ ; | (l) $x^2y'e^{x/y} = xy'e^{x/y} + y^2$ ;           |
| (f) $(3x^2 + xy - y^2) dx + x^2 dy = 0$ ;  | (m) $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ . |
| (g) $y' = (9x^2 + y^2 + xy)/x^2$ ;         |   |

4. Znaleźć całki szczególne następujących równań jednorodnych:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $(5\sqrt{xy} - y) dx + x dy = 0, y(1) = 25$ ; |  |
| (b) $xy' - y = x \cos^2(y/x), y(3) = 0$ ;         |  |
| (c) $xy' = y(3 + \ln y - \ln x), y(1) = 1/e$ ;    |  |
| (d) $xy' = y + xe^{y/x}, y(1/e) = 0$ .            |  |

5. Znaleźć całki ogólne następujących równań:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| (a) $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$ ;             | (e) $y' = \frac{x - 2y + 3}{2x + y + 1}$ ; | (i) $y' = \frac{x - y - 3}{x + y + 1}$ ;  |
| (b) $y' = \frac{x + y + 3}{3x + 3y + 1}$ ;              | (f) $y' = \frac{x + y}{x + 4y + 3}$ ;      | (j) $y' = \frac{x + y + 1}{x - y - 5}$ ;  |
| (c) $y' = \left(\frac{x + y - 1}{x + y + 1}\right)^2$ ; | (g) $y' = \frac{x + y - 1}{x + 2y - 4}$ ;  | (k) $y' = \frac{x + y + 2}{2x + y + 5}$ . |
| (d) $y' = \left(\frac{x - y + 1}{x - y - 1}\right)^2$ ; | (h) $y' = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}$ ;   |   |

6. Znaleźć całki ogólne następujących równań liniowych:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $y' - y = e^x$ ;   | (m) $xy' - 2y = x^3 + x$ ;                    |
| (b) $y' + y = x$ ;   | (n) $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$ ;                  |
| (c) $xy' - 2y = 2 \sin x - x \cos x$ ;   | (o) $y' \ln x - y/x = 1 - \ln x$ ;            |
| (d) $y' + 4y/x + x = 0$ ;  | (p) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$ ;       |
| (e) $y' + 3y/x = x^2$ ;  | (q) $y' + y/x = \sin x$ ;                     |
| (f) $x^2 y' + 2xy - 1 = 0$ ;   | (r) $xy' \ln x = 5x - y$ ;                    |
| (g) $y' + 2xy = 2e^{-x^2}$ ;   | (s) $xy' + 2y = e6x$ ;                        |
| (h) $y' - 7y = 8e^{3x}$ ;  | (t) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ ; |
| (i) $(1 + x^2)y' = y^2$ ;  | (u) $y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}$ ;     |
| (j) $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$ ;   | (v) $y' = y^2/(x + ye^{-1/y})$ .              |
| (k) $y' + 3y/x = 8x^4$ ;   |   |
| (l) $y' - y/\sqrt{x} - e^{2\sqrt{x}} = 0$ ;  |   |
| (w) $y' \sin x - y \cos x = \sin x - x \cos x$ ;                                   |   |
| (x) $y' \arctan x - \frac{y}{1+x^2} = 2x \arctan x - \frac{x^2}{1+x^2}$ ;          |   |
| (y) $y' \arcsin x - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; |   |
| (z) $y' \cosh x - y \sinh x = 2 \cosh x - 2x \sinh x + \sinh x$ .                  |   |

7. Znaleźć całki szczególne następujących równań liniowych:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $xy' - 2y = x, y(1) = 1$ ;                       | (f) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, y(3) = 40$ ;          |
| (b) $y' - 2y = e^{-x}, y(0) = -1$ ;                  | (g) $x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x, y(\pi/2) = \pi$ ;    |
| (c) $\frac{dy}{dx} + e^x y = e^{2x}, y(0) = 1/e$ ;   | (h) $xy' \ln x = y + \ln x, y(e^2) = 2 \ln 2$ ;             |
| (d) $y'(1 - x^2) = xy + 1, y(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$ ; | (i) $xy' - 3y = 3 - 4x - x^2, y(1) = 3$ ;                   |
| (e) $y' + 3y = xe^{-3x}, y(0) = 0$ ;                 | (j) $y' \cos x + y \sin x = -\cos x - x \sin x, y(0) = 2$ . |

8. Rozwiązać następujące równania Bernoulliego:

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| (a) $y' - xy = x^3 y^2$ ;   | (c) $2y' + y = x/y$ ;    |
| (b) $xy' + y = y^2 \ln x$ ; | (d) $y' + y/x = -xy^2$ . |

9. Rozwiązać następujące równania różniczkowe zupełne:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $(x + 1) dx + (y - 1) dy = 0$ ;   | (d) $\frac{(x + 3) dy - (y - 2) dx}{(x + 3)^2} = 0$ ; |
| (b) $(x - 2) dx + (4y - 8) dy = 0$ ;  | (e) $(y - 1) dx + (x + 2) dy = 0$ ;                   |
| (c) $\frac{(y + 1) dx - (x - 1) dy}{(y + 1)^2} = 0$ ;                                 | (f) $(2x - y) dx + (2y - x) dy = 0$ ;                 |
| (g) $(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x) dx + (\cos y + 2y) dy = 0$ ;                       |   |
| (h) $(2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy = 0$ ;   |   |
| (i) $(\sinh x - y) dx + (\cosh y - x) dy = 0$ ;                                       |   |
| (j) $\left(y + \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \left(x - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = 0$ ; |   |

$$(k) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 2xy^2 \right) dx + \left( \frac{1}{y} - 2x^2y \right) dy = 0;$$

$$(l) (3x^2 - 2y^2 + 8xy) dx + (4x^2 - 4xy - 3y^2) dy = 0;$$

$$(m) (4x^3 + 15x^2y + 8xy^2) dx + (5x^3 + 8x^2y - 4y^3) dy = 0.$$

10. Znaleźć całki szczególne następujących równań różniczkowych zupełnych:

$$(a) (2x - 2) dx + (y + 1) dy = 0, y(1) = 0;$$

$$(b) (y + 3) dx + (x - 4) dy = 0, y(0) = -1;$$

$$(c) x^3 dx + y^3 dy = 0, y(1) = 1;$$

$$(d) (\cos x + 2xy) dx + (x^2 + \sin y) dy = 0, y(0) = 0;$$

$$(e) (y - e^{-x}) dx + (x + 2y) dy = 0, y(0) = 1;$$

$$(f) (2x + \cos x) dx + (e^y - \sin y) dy = 0, y(0) = 0.$$

11. Rozwiązać następujące równania znajdując czynnik całkujący  $\mu(x)$  lub  $\mu(y)$ :

$$(a) y dx + x \ln x dy = 0;$$

$$(b) (e^x - y)\sqrt{y} dx + (1 - x\sqrt{y}) dy = 0;$$

$$(c) y^2 \cos x \sin y dx + (y^2 \sin x \cos y + 1) dy = 0;$$

$$(d) (yx^2 - 1) dx + (x^3 + x^2 \cos y) dy = 0.$$

12. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych Clairauta (lub Lagrange'a):

$$(a) y = xy' - (y')^2; \quad (c) y = xy' - (y')^{2/3}; \quad (e) y = (1 + y')x + (y')^2;$$

$$(b) y = xy' + 1 + (y')^2; \quad (d) y = y' \ln y'; \quad (f) x = (y')^2 - 2y' + 2.$$

13. Rozwiązać następujące równania różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego:

$$(a) y'' = 3x^2 - 4x + 1; \quad (i) 4y''\sqrt{y} = 1; \quad (p) yy'' - y'^2 = 0;$$

$$(b) y'' = 6x + \cosh x; \quad (j) 3y'' = y^{-5/3}; \quad (q) yy'' + y'^2 + 1 = 0;$$

$$(c) y'' = x^2 - \cos x; \quad (k) yy'' = 1; \quad (r) yy'' - y^2y' - y'^2 = 0;$$

$$(d) y'' = 2x - \sinh x; \quad (l) (1 + x^2)y'' - 2xy' = 0; \quad (s) yy'' = 1 + y'^2.$$

$$(e) y'' = 3y'; \quad (m) xy'' - y' = 0; \quad (t) yy'' = xy'^2;$$

$$(f) y'' + 2y' = 0; \quad (n) (1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0; \quad (u) xy'' - 2xy'^2 + yy' = 0;$$

$$(g) y'' = y'(1 + y'^2); \quad (o) (1 + x)y'' + y' = 0; \quad (v) xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

$$(h) y'' = 6/y^3;$$

row1.tex