

## EGZAMIN PISEMNY Z MATEMATYKI 1

1. Wyznaczyć granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{2n - \sqrt{4n^2 - 5}}$ .

3

2. Z badać zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + n}$ .

4

3. Podać definicję pochodnej funkcji. Korzystając z podanej definicji, wykazać, że jeśli  $f(x) = \frac{1}{x}$ , to  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

4

4. Wyznaczyć  $f(1)$ ,  $f'(1)$  i  $f''(1)$ , gdy  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ .

4

5. (1) Ułamek  $f(x) = \frac{4x-8}{x^2-2x-3}$  przedstawić w postaci sumy ułamków prostych. (2) Następnie funkcję  $f(x)$  przedstawić w postaci szeregu potęg samego  $x$ , czyli szeregu postaci  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . (3) Czy otrzymany szereg jest zbieżny dla  $x = 2$ ? (4) Wyznaczyć  $a_{10}$  i  $f^{(10)}(0)$ .

6

---

6. Napisać równanie stycznej do krzywej  $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$  w punkcie  $P(3, 1)$ .

4

---

7. (1) Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$ . (2) Wyznaczyć ekstremum funkcji  $f(x)$ . (3) Wyznaczyć przedziały wklęsłości, przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji  $f(x)$ .

5

---

8. (1) Rozwiązać równanie  $x^2 + x - 6 = 0$ . (2) Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{5x^3 + 5x^2}{x^2 + x - 6}$ . (3) Wielomian  $5x^3 + 5x^2$  podzielić przez wielomian  $x^2 + x - 6$ . (4) Ułamek  $\frac{5x^3 + 5x^2}{x^2 + x - 6}$  zapisać w postaci  $ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + x - 6}$ . (5) Ułamek  $\frac{cx + d}{x^2 + x - 6}$  zapisać w postaci sumy ułamków prostych. (6) W końcu, korzystając z poprzedniego, obliczyć całkę  $\int \frac{5x^3 + 5x^2}{x^2 + x - 6} dx$ .

10

---

9. Przedstawić pełny proces wyznaczania całki  $\int \frac{dx}{2 - \cos x}$ .

5

---

10. Wyznaczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi  $Ox$  obszaru ograniczonego przez wykres funkcji  $y = \sqrt{x} e^{x/2}$  oraz proste  $y = 0$  i  $x = 1$ .

5