

1. Indukcyjnie wykazać, że liczba  $5 \cdot 6^n + 8 \cdot 32^n$  jest podzielna przez 13 dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

4

2. Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania  $(x, y)$  równania  $7x + 11y = 5$ .

3

3. Indukcyjnie wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 60$  istnieją liczby naturalne  $x$  i  $y$  takie, że  $n = 7x + 11y$ .

3

4. Dany jest ciąg rekurencyjny  $(a_n)$ , w którym  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$  i  $a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$  dla  $n \geq 2$ . Za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu.

4

5. Dany jest ciąg rekurencyjny  $(a_n)$ , w którym  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -5$  i  $a_n = -3a_{n-1} + 28a_{n-2} + 48$  dla  $n \geq 2$ . Wyznaczyć jawny wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu.

3

6. Rozwiązać równanie: (a)  $21x \equiv 6 \pmod{43}$ ; (b)  $63x \equiv 18 \pmod{129}$ .

4

7. Wykazać, że  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ , gdy  $n, k \in \mathbb{N}$ .

4

8. Wyznaczyć liczbę całkowitych rozwiązań równania  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$  takich, że: (a)  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ ; (b)  $x_1 < 5, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ ; (c)  $x_1 \geq -1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1, x_4 \geq 2, x_5 \geq 3, x_6 \geq 4$ .

3

9. (a) Za pomocą algorytmu rosyjskich chłopów obliczyć iloczyn liczb 431 i 35. (b) Za pomocą algorytmu szybkiego potęgowania obliczyć  $108^{19} \pmod{97}$ . W obu przypadkach przedstawić obliczenia.

4

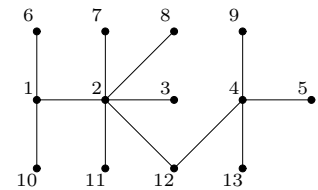
10. Wyznaczyć  $\varphi(100)$  i następnie, korzystając z twierdzenia Eulera, obliczyć  $47^{2013} \pmod{100}$ . Przedstawić obliczenia.

4

11. Podać przykład grafu, który: (a) jest grafem Eulera i grafem Hamiltona; (b) jest grafem Eulera i nie jest grafem Hamiltona; (c) nie jest grafem Eulera i jest grafem Hamiltona; (d) nie jest grafem Eulera i nie jest grafem Hamiltona.

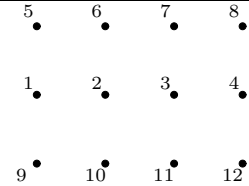
4

12. Podać kod Prüfera  $C(T)$  podanego drzewa  $T$ .  
 $C(T) =$



3

13. Wyznaczyć drzewo  $T$ , którego kodem Prüfera jest ciąg  $C(T) = (1, 2, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 8, 8)$ .



3

14. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para  $(r, s) = (667, 9)$  (i tylko oni wiedzą, że  $r = pq = 23 \cdot 29$ ). Bolek od Alicji otrzymał informację  $L$ , której kodem jest  $C = 345$ . W roli Bolka wyznaczyć liczbę  $L$ .

4