Nazwisko i imię	Nr albumu	2008 B

1. Wyznaczyć trzy rozwiązania równania $z^3 = e^{6(2+j\frac{\pi}{3})}$.

2. Obliczyć $\det(\mathbf{A}^3)$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

3. Dana jest macierz $\mathbf{A} \in R_{3\times 4}$. Czy macierz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ jest symetryczna? Dlaczego?

4. Macierze $\mathbf{F}$, $\mathbf{H} \in R_{n\times n}$ są podobne, gdy istnieje macierz odwracalna $\mathbf{Q}$ taka, że $\mathbf{QFQ}^{-1} = \mathbf{H}$. Pokazać, że jeśli macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in R_{n\times n}$ są odwracalne, to macierze $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ są podobne.

5. Pokazać, że $S = \{\mathbf{A} \in R_{3\times 3} \colon \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $R_{3\times 3}$. Wskazać $\dim S$.

6. Przy pomocy wyznaczników pokazać, że nie istnieją macierze odwracalne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in R_{3\times 3}$ takie, że $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = -\mathbf{A}$.

7. Wyznaczyć rzut wektora $\mathbf{b} = (-1, 2, 6)$ na podprzestrzeń $W = \mathcal{L}\left((3, -1, 2), (1, -1, -2)\right)$.

8. Znaleźć najlepsze rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$.

9. Dana jest przestrzeń V z bazą $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ i przekształcenie liniowe $T\colon V \to V$ takie, że $T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, $T(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$ i $T(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3$. Wyznaczyć macierz $[T]_B$ przekształcenia T względem bazy B.

10. Wyznaczyć bazę przestrzeni zerowej $N_{\mathbf{A}}$ i bazę przestrzeni kolumnowej $C_{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

11. Metodą Grama-Schmidta dokonać ortogonalizacji bazy $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ przestrzeni $V = \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \subset R^4$, gdzie $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, -1, 1)$ i $\mathbf{b}_3 = (1, 2, -3, -4)$. Dodatkowo, wyznaczyć te wektory $\mathbf{v} \in V$, które są ortogonalne do $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$ i dla których $\|\mathbf{v}\| = 10$.