Nazwisko i imię	Nr grupy

1. Rozwiązać równanie $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Wyznaczyć wymiar i ortogonalną bazę podprzestrzeni $V = \{(x+2y+4z, x+2z, y+z, x-2y) : x, y, z \in R\}$ (przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym).

3. Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są podobne, gdy istnieje nieosobliwa macierz $\mathbf{P}$ taka, że $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Wykazać, że jeśli macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są podobne i macierz $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to także macierz $\mathbf{B}$ jest odwracalna.

4. Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. (a) Wyznaczyć wartości własne macierzy $\mathbf{A}$. (b) Wyznaczyć wektory własne macierzy $\mathbf{A}$. (c) Z wektorów własnych utworzyć macierz $\mathbf{P}$ taką, że macierz $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ jest diagonalna. (d) Korzystając z (c) wyznaczyć $\mathbf{A}^{20}$.

5. Wyznaczyć takie $q \in R$, że wektory $(2,1,2,3)$, $(1,4,2,1)$, $(1,1,2,1)$, $(-1,3,5,q)$ są liniowo niezależne.

6. Wyznaczyć najlepsze rozwiązanie równania $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

7. Wyjaśnić dlaczego zbiór R^2 ze zwykłym dodawaniem wektorów i z mnożeniem wektorów przez skalary określonym wzorem $r(x,y) = (rx, y)$ nie jest przestrzenią wektorową nad ciałem R.

8. Wykazać, że funkcja T: $R^3 \to R^2$ jest przekształceniem linowym, gdy $T(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 4x - y)$.

9. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ na podprzestrzeń $W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ przestrzeni R^3.