Nazwisko i imię	Nr albumu	Matematyka dyskretna 22.06.2012 **A**

1. Indukcyjnie wykazać, że liczba $5 \cdot 6^n + 2^{5n+3}$ jest podzielna przez 13 dla każdej liczby naturalnej n.

2. Indukcyjnie wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 24$ istnieją liczby naturalne x i y takie, że $n = 5x + 7y$.

3. Dany jest ciąg rekurencyjny (a_n), w którym $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ i $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Za pomocą równania charakterystycznego i za pomocą funkcji tworzącej wyznaczyć jawny wzór na n-ty wyraz ciągu.

4. Rozwiązać równanie $154x \equiv 2 \pmod{801}$.

5. Wykazać, że $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, gdy $n, k \in \mathbb{N}$.

6. Wyznaczyć liczbę całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$ takich, że $x_1 > 1$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 > 13$, $x_4 > -1$, $x_5 \geqslant 5$ i $x_6 > -6$.

7. Wyznaczyć liczbę liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, które nie są podzielne przez 5, przez 6, ani przez 8.

8. Wyznaczyć $\varphi(120)$ i następnie obliczyć $997^{1000} \equiv \pmod{120}$ korzystając z twierdzenia Eulera.

9. Publicznym kodem Alicji i Bolka jest para $(r, s) = (893, 7)$ (i tylko oni wiedzą, że $r = pq = 19 \cdot 47$). Bolek od Alicji otrzymał informację L, której kodem jest $C = 345$. W roli Bolka wyznaczyć liczbę L.

10. We wskazanym grafie wyznaczyć cykl (lub ścieżkę) Eulera.